

Metode Transformasi Diferensial untuk Menentukan Solusi Persamaan Diferensial Linear Nonhomogen

VALESKA ISMA FIROSI, HERLINA NAPITUPULU,
ASEP KUSWANDI SUPRIATNA

DEPARTEMEN MATEMATIKA, FAKULTAS MIPA, UNIVERSITAS PADJADJARAN
JL. RAYA BANDUNG SUMEDANG KM 21 JATINANGOR SUMEDANG 45363
EMAIL: VALESKA17001@MAIL.UNPAD.AC.ID, HERLINA@UNPAD.AC.ID,
A.K.SUPRIATNA@UNPAD.AC.ID

Abstrak

Persamaan diferensial merupakan salah satu topik dalam matematika yang banyak digunakan dalam memodelkan masalah kehidupan nyata. Misalkan pemodelan penyakit, perkembangan bakteri, pemodelan gelombang, persamaan panas dan lain sebagainya. Secara umum, ada dua jenis persamaan diferensial, yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP). Pada praktiknya, penyelesaian PDB maupun PDP secara analitik memiliki tantangan tersendiri, sehingga solusi dengan metode semi-analitik (pendekatan dengan kombinasi antara analitik dan pendekatan numerik) merupakan alternatif yang sampai saat ini menarik untuk dikaji. Metode Transformasi Diferensial (MTD) adalah salah satu metode numerik semi-analitik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Metode ini didasarkan pada perluasan deret Taylor, dimana persamaan diferensial diubah menjadi relasi rekurensi untuk mendapatkan solusi deret dalam bentuk polinomial. Pada penelitian ini dibahas secara rinci bagaimana pengaplikasian metode transformasi diferensial untuk penyelesaian PDB linear nonhomogen dan PDP linear nonhomogen untuk beberapa contoh kasus tertentu yang belum pernah dibahas pada penelitian terdahulu. Pertama, digunakan MTD untuk menyelesaikan masalah nilai awal serta masalah nilai batas untuk PDB linear nonhomogen. Selanjutnya, digunakan MTD Dua Dimensi untuk menyelesaikan masalah nilai awal dan batas untuk PDP linear nonhomogen. Hasil yang diperoleh dengan MTD dibandingkan dengan solusi analitik dari PDB yang diubah ke bentuk deret Taylor. Demikian pula, hasil yang diperoleh MTD Dua Dimensi dibandingkan dengan solusi analitik PDB yang diubah ke bentuk deret Taylor. Perbandingan solusi analitik dan solusi MTD diberikan dalam bentuk perbandingan grafik solusi dengan *software* Maple serta dilakukan perhitungan galat. Berdasarkan perhitungan galat, solusi dari PDB dan PDP ini mendekati solusi analitik dengan galat yang relatif kecil, terlebih ketika banyaknya iterasi ditingkatkan pada MTD dan MTD dua dimensi.

Kata kunci: Persamaan Diferensial Biasa, Persamaan Diferensial Parsial, Metode Transformasi Diferensial, deret Taylor, solusi analitik.

Abstract

Differential equations is a topic in mathematics that is widely used in modeling real-life problem. For example, disease modeling, bacterial development, wave modeling and heat equations. In general, there are two types of differential equations, namely Ordinary Differential Equations (ODE) and Partial Differential Equations (PDE). In practice, solving ODE and PDE analitically has its own challenges, so a solution semi-analytical method (approach in which a problem is analyzed using a combination of analytical and numerical approaches) is an alternative that is currently interesting to study. Differential Transform Method (DTM) is one of the semi-analytical numerical method for solving differential equations. This method is based on Taylor series expansion, in which the differential equation is converted into a recurrence relation to get a series solution in terms of polynomials. In this research, the application of the DTM was discussed in detail for solving nonhomogeneous linear ODE and nonhomogeneous linear PDE for some specific cases that have never been discussed in previous studies. First, DTM is used to solve initial value problems and boundary value problems for nonhomogeneous linear ODE. Next, Two-Dimensional MTD used to solve initial and boundary value problems for nonhomogeneous linear PDE. The results derived by DTM is compared with the analytical solution of ODE that has been converted into the Taylor series. Likewise, the results derived by Two Dimensional DTM is compared with the analytical solution of ODE that has been converted into the Taylor series. The comparison between the analytical solution and the Differential Transform Method (DTM solution is presented in the form of a graphical solution using Maple software, then the error calculations are performed. Based on the error calculations, the solutions of the ODE (Ordinary Differential Equation) and PDE (Partial Differential Equation) approximate the analytical solution with relatively small errors, especially when the number of iterations is increased in the DTM and two-dimensional DTM.

Keywords: *Ordinary Differential Equation, Partial Differential equations, Differential Transformation Method, Taylor series, analytical solution.*

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih variabel tak bebas beserta turunannya terhadap variabel-variabel bebas. Persamaan diferensial yang melibatkan hanya satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa (PDB). Sedangkan persamaan diferensial yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial (PDP) [1]. Salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa dan parsial adalah metode transformasi diferensial.

Metode transformasi diferensial (MTD) pertama kali diperkenalkan oleh Zhou pada tahun 1986 ([2]) untuk menyelesaikan persamaan linear dan nonlinear. Metode ini adalah metode numerik semi analitik untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Metode transformasi diferensial didasarkan pada ekspansi deret Taylor, yaitu solusinya dinyatakan dalam deret polinomial [3]. Keunggulan metode ini adalah mudah digunakan, dimana solusi dari persamaan diferensial biasa dan parsial dapat dicari dengan menggunakan teorema-teorema yang berlaku. Berdasarkan kajian [3] perbandingan kedekatan solusi numerik semi-analitik menggunakan

metode transformasi diferensial dengan solusi analitiknya terlihat bahwa solusi yang diperoleh menggunakan metode transformasi diferensial memiliki tingkat kekonvergenan yang cepat terhadap solusi analitiknya.

Pengaplikasian MTD pada PDB diantaranya digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial Riccati dan persamaan diferensial nonlinear Bratu. Pada [7] MTD digunakan untuk menyelesaikan masalah predator-prey, disisi lain kajian [5] menerapkan MTD untuk menyelesaikan model demam tifoid untuk populasi konstan dan membandingkannya dengan metode RK4. Pada [6], metode ini digunakan untuk menyelesaikan model epidemi SEIR. Beberapa penulis lain yang telah menggunakan MTD dalam menyelesaikan model epidemiologi antara lain [7], [8], [9], dan [10]. MTD memiliki keuntungan karena relatif mudah untuk dipahami dan diimplementasikan. MTD dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear dan nonlinear secara langsung tanpa memerlukan linearisasi, diskritisasi, atau gangguan ([7]). Metode ini telah diaplikasikan pada masalah nilai batas pada [11] serta masalah nilai eigen pada [12]. Selain itu, pengaplikasian MTD dua dimensi yang dimodifikasi diantaranya digunakan untuk menyelesaikan persamaan *diffusion-wave* ([13]). Berdasarkan kajian [11], modifikasi metode ini memberikan hasil numerik yang efisien dan akurat untuk masalah nilai batas yang dibandingkan metode dekomposisi Adomian. Saat ini metode MDT terus dikembangkan, diantaranya seperti kajian pada [14] yang mengusulkan *modified differential transform method* (MDTM) untuk solusi osilator nonlinear. Kajian lainnya yaitu [15] yang mengusulkan MDT yang dimodifikasi untuk memperoleh solusi pendekatan untuk Osilator Duffing nonlinear dengan redaman. Kajian-kajian MDT juga banyak dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial fraksional diantaranya pada [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22].

Kajian mengenai penerapan metode ini untuk berbagai kasus menjadi kajian yang menarik sampai saat ini. Pada paper ini dipilih beberapa contoh kasus yang selanjutnya dicari solusi eksak dan solusi aproksimasinya dengan menerapkan MTD untuk penyelesaian persamaan diferensial biasa dan MTD dua dimensi untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial yang belum dibahas secara rinci pada literatur terdahulu. Pada akhir pembahasan, ditunjukkan pula performa metode ini dibandingkan dengan solusi eksaknya melalui grafik dan perhitungan galat.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan pada paper ini adalah Metode Transformasi Diferensial untuk pencarian solusi PDB linear nonhomogen orde satu dan dua, sedangkan untuk pencarian solusi PDP linear nonhomogen orde satu dan dua menggunakan MTD Dua Dimensi. Berikut ini diberikan beberapa teori pendukung yang digunakan dalam penelitian ini.

2.1. Persamaan Diferensial Biasa.

Definisi 2.1. [3]. *Bentuk umum persamaan diferensial biasa linear nonhomogen orde satu adalah sebagai berikut*

$$y' + p(x)y = r(x) \quad (1)$$

dengan p, r adalah fungsi-fungsi dari x yang diketahui dan $r(x) \neq 0$.

Definisi 2.2. [3]. *Bentuk umum persamaan diferensial biasa linear nonhomogen orde satu adalah sebagai berikut*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (2)$$

dengan p, r adalah fungsi-fungsi dari x yang diketahui dan $r(x) \neq 0$.

2.2. Persamaan Diferensial Parsial.

Definisi 2.3. [24]. *Bentuk umum persamaan diferensial parsial linear nonhomogen orde satu adalah sebagai berikut*

$$Au_x + Bu_y + Cu = D \quad (3)$$

dimana $D \neq 0$,

u : variabel tak bebas, merupakan fungsi dari x dan y ,

A, B, C, D : koefisien, bisa konstan atau merupakan fungsi dari x atau y namun bukan fungsi dari u .

Definisi 2.4. [25]. Bentuk umum persamaan diferensial parsial linear nonhomogen orde dua adalah sebagai berikut

$$Au_x + Bu_y + Cu = D \quad (4)$$

dengan $D \neq 0$, u adalah variabel tak bebas, merupakan fungsi dari x dan y , dan A, B, C, D adalah koefisien konstan atau merupakan fungsi dari x atau y tetapi bukan fungsi dari u .

2.3. Metode Transformasi Diferensial (MTD).

Definisi 2.5. [26]. Metode transformasi diferensial dari fungsi $y(x)$ di $x = x_0$ yang kontinu didefinisikan sebagai berikut

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0}, \quad (5)$$

dengan k anggota himpunan bilangan bulat nonnegatif, dan $Y(k)$ adalah fungsi transformasi.

Definisi 2.6. [27]. Fungsi invers dari transformasi diferensial $Y(k)$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) (x - x_0)^k. \quad (6)$$

Jika $x_0 = 0$, maka persamaan (6) menjadi

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k. \quad (7)$$

Karena dalam penerapan persamaan (6) hanya diambil sejumlah hingga suku saja, maka diperoleh solusi hampiran berikut

$$y(x) \approx \sum_{k=0}^N Y(k) x^k. \quad (8)$$

Teorema-teorema berikut ini dirujuk dari [28] dan digunakan untuk memperoleh penyelesaian dengan MTD contoh kasus yang dibahas pada paper ini, teorema lainnya secara lengkap dapat merujuk pada sumber tersebut.

Teorema 2.7. Jika $y(x) = \alpha g(x) + \beta h(x)$, maka $Y(k) = \alpha G(k) + \beta H(k)$, dimana α dan β adalah konstanta.

Proof. Misalkan $y(x)$ adalah fungsi awal, maka transformasi diferensial dari $y(x)$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right|_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k (\alpha g(x) + \beta h(x))}{dx^k} \right|_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k (\alpha g(x))}{dx^k} + \frac{d^k (\beta h(x))}{dx^k} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \alpha \left. \frac{d^k g(x)}{dx^k} \right|_{x=0} + \frac{1}{k!} \beta \left. \frac{d^k h(x)}{dx^k} \right|_{x=0} \\ &= \alpha G(k) + \beta H(k) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.8. Jika $y(x) = x^n$, maka $Y(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 1, k=n \\ 0, k \neq n. \end{cases}$

Proof. Misalkan $y(x)$ adalah fungsi awal, maka transformasi diferensial dari $f(x)$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right|_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k x^n}{dx^k} \right|_{x=0}. \end{aligned}$$

Dari sifat persamaan diferensial diketahui

$$\frac{d^k x^n}{dx^k} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) x^{n-k},$$

jadi

$$Y(k) = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} x^{n-k}.$$

Jika $n = k$, maka

$$Y(k) = \frac{k(k-1)(k-2) \dots 1}{k!} = \frac{k!}{k!} = 1.$$

Jika $n \neq k$ dan $x = 0$, maka $Y(k) = 0$.

Dengan demikian,

$$Y(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 1, k=n \\ 0, k \neq n. \end{cases}$$

□

Teorema 2.9. Jika $y(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$, maka $Y(k) = (k+1)(k+2) \dots (k+n) G(k+n)$.

Proof. Misalkan $y(x)$ adalah fungsi awal, maka transformasi diferensial dari $y(x)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right|_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k \frac{d^n g(x)}{dx^n}}{dx^k} \right|_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^{k+n} g(x)}{dx^{k+n}} \right|_{x=0} \\ &= \frac{(k+n)!}{k!} \left[\frac{1}{(k+n)!} \left. \frac{d^{k+n} g(x)}{dx^{k+n}} \right|_{x=0} \right] \\ &= (k+1)(k+2) \dots (k+n) G(k+n) \end{aligned}$$

□

2.4. Metode Transformasi Diferensial Dua Dimensi (MTDDD).

Definisi 2.10. [29] Misalkan $u(x, y)$ adalah fungsi dari dua variabel yang analitik dan kontinu diferensiabel pada bilangan bulat nonnegatif. Maka transformasi diferensial dua dimensi dari fungsi $u(x, y)$ didefinisikan sebagai berikut

$$U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x, y) = (x_0, y_0)}, \quad (9)$$

ketika $(x_0, y_0) = (0, 0)$ maka persamaan (9) didefinisikan sebagai berikut

$$U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x, y) = (0, 0)}. \quad (10)$$

dengan $u(x, y)$ adalah fungsi awal dan $U(k, h)$ adalah transformasi diferensial dua dimensi.

Definisi 2.11. [29] Invers transformasi diferensial dari $U(k, h)$ didefinisikan sebagai berikut

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) (x - x_0)^k (y - y_0)^h, \quad (11)$$

ketika $(x_0, y_0) = (0, 0)$ maka persamaan (11) didefinisikan sebagai berikut

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k y^h. \quad (12)$$

Teorema-teorema 12-19 ini dirujuk dari [30] dan digunakan untuk memperoleh penyelesaian dengan MTDDD pada contoh kasus yang dibahas pada paper ini, teorema lainnya secara lengkap dapat merujuk pada sumber tersebut.

Teorema 2.12. Jika $u(x, y) = c$ untuk c suatu konstanta maka

$$\begin{aligned} U(k, h) &= c\delta(k, h) \\ &= c \begin{cases} 1, & k = h = 0 \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \end{aligned}$$

Proof. Untuk $k = 0$ dan $h = 0$, maka

$$\frac{\partial^0 u(x, y)}{\partial x^0 \partial y^0} = u(x, y) = c.$$

Untuk $k > 0$ dan $h > 0$, maka

$$\frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} = 0.$$

Jadi diperoleh

$$U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} c}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x, y) = (0, 0)}$$

jika dan hanya jika

$$c\delta(k, h) = c \begin{cases} 1, & k = h = 0 \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

□

Teorema 2.13. Jika $u(x, y) = \alpha v(x, y) \pm \beta w(x, y)$, maka $U(k, h) = \alpha V(k, h) \pm \beta W(k, h)$, dimana α dan β adalah konstanta.

Proof.

$$\begin{aligned} U(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x, y) = (0, 0)} \\ &= \frac{1}{k!h!} \cdot \\ &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} (\alpha v(x, y))}{\partial x^k \partial y^h} \pm \frac{\partial^{k+h} (\beta w(x, y))}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x, y) = (0, 0)} \\ &= \frac{\alpha}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} v(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x, y) = (0, 0)} \pm \frac{\beta}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x, y) = (0, 0)} \\ &= \alpha V(k, h) \pm \beta W(k, h) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.14. Jika $u(x, t) = \frac{\partial^r w(x, y)}{\partial x^r}$, maka $U(k, h) = (k+1)(k+2) \dots (k+r) W(k+r, h)$.

Proof.

$$\begin{aligned} U(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left. \frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right|_{(x, y)=(0,0)} \\ &= \frac{1}{k!h!} \left. \frac{\partial^{k+h} \left(\frac{\partial^r w(x, y)}{\partial x^r} \right)}{\partial x^k \partial y^h} \right|_{(x, y)=(0,0)} \\ &= (k+1)(k+2) \dots (k+r) \frac{1}{(k+r)!h!} \left[\frac{\partial^{(k+r)+h} w(x, y)}{\partial x^{k+r} \partial y^h} \right]_{(x, y)=(0,0)} \\ &= (k+1)(k+2) \dots (k+r) W(k+1, h) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.15. Jika $u(x, y) = \frac{\partial^s w(x, y)}{\partial y^s}$, maka $U(k, h) = (h+1)(h+2) \dots (h+s) U(k, h+s)$.

Proof.

$$\begin{aligned} U(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left. \frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right|_{(x, y)=(0,0)} \\ &= \frac{1}{k!h!} \left. \frac{\partial^{k+h} \left(\frac{\partial^s w(x, y)}{\partial y^s} \right)}{\partial x^k \partial y^h} \right|_{(x, y)=(0,0)} \\ &= (h+1)(h+2) \dots (h+s) \frac{1}{k!(h+s)!} \left[\frac{\partial^{k+(h+s)} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^{h+s}} \right]_{(x, y)=(0,0)} \\ &= (h+1)(h+2) \dots (h+s) U(k, h+s) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.16. Jika $u(x, y) = \frac{\partial^{r+s} w(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$, maka $U(k, h) = \frac{(k+r)!(h+s)!}{k!h!} W(k+r, h+s)$.

Proof.

$$\begin{aligned} U(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left. \frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right|_{(x, y)=(0,0)} \\ &= \frac{1}{k!h!} \left. \frac{\partial^{k+h} \left(\frac{\partial^{r+s} w(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right)}{\partial x^k \partial y^h} \right|_{(x, y)=(0,0)} \\ &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{(k+r)+(h+s)} w(x, y)}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s}} \right]_{(x, y)=(0,0)} \\ &= \frac{(k+r)!(h+s)!}{k!h!} W(k+r, h+s) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.17. Jika $u(x, y) = x^m y^n$, maka $U(k, h) = \delta(k-m) \delta(h-n)$, dimana $\delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k=m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$, $\delta(h-n) = \begin{cases} 1, & h=n \\ 0, & h \neq n. \end{cases}$

Proof.

$$\begin{aligned}
 U(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left. \frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right|_{(x, y)=(0, 0)} \\
 &= \frac{1}{k!h!} \left. \frac{\partial^{k+h} (x^m y^n)}{\partial x^k \partial y^h} \right|_{(x, y)=(0, 0)} \\
 &= \left[\frac{1}{k!} \frac{\partial^k x^m}{\partial x^k} \right]_{x=0} \left[\frac{1}{h!} \frac{\partial^h y^n}{\partial y^h} \right]_{y=0} \\
 &= \left[\frac{1}{k!} \frac{d^k x^m}{dx^k} \right]_{x=0} \left[\frac{1}{h!} \frac{d^h y^n}{dy^h} \right]_{y=0}
 \end{aligned}$$

□

Teorema 2.18. Jika $u(x, y) = x^m \sin(\alpha y + \beta)$, maka $U(k, h) = \delta(k - m) \frac{\alpha^h}{h!} \sin\left(\frac{h\pi}{2} + \beta\right)$, dimana α dan β adalah konstanta.

Proof.

$$\begin{aligned}
 U(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left. \frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right|_{(x, y)=(0, 0)} \\
 &= \frac{1}{k!h!} \left. \frac{\partial^{k+h} (x^m \sin(\alpha y + \beta))}{\partial x^k \partial y^h} \right|_{(x, y)=(0, 0)} \\
 &= \left[\frac{1}{k!} \frac{\partial^k x^m}{\partial x^k} \right]_{x=0} \left[\frac{1}{h!} \frac{\partial^h \sin(\alpha y + \beta)}{\partial y^h} \right]_{y=0} \\
 &= \left[\frac{1}{k!} \frac{d^k x^m}{dx^k} \right]_{x=0} \left[\frac{1}{h!} \frac{d^h \sin(\alpha y + \beta)}{dy^h} \right]_{y=0} \\
 &= \frac{\alpha^h}{h!} \delta(k - m) \sin\left(\frac{h\pi}{2} + \beta\right)
 \end{aligned}$$

□

Teorema 2.19. Jika $u(x, y) = x^m \cos(\alpha y + \beta)$, maka $U(k, h) = \delta(k - m) \frac{\alpha^h}{h!} \cos\left(\frac{h\pi}{2} + \beta\right)$, dimana α dan β adalah konstanta.

Proof.

$$\begin{aligned}
 U(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left. \frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right|_{(x, y)=(0, 0)} \\
 &= \frac{1}{k!h!} \left. \frac{\partial^{k+h} (x^m \cos(\alpha y + \beta))}{\partial x^k \partial y^h} \right|_{(x, y)=(0, 0)} \\
 &= \left[\frac{1}{k!} \frac{\partial^k x^m}{\partial x^k} \right]_{x=0} \left[\frac{1}{h!} \frac{\partial^h \cos(\alpha y + \beta)}{\partial y^h} \right]_{y=0} \\
 &= \left[\frac{1}{k!} \frac{d^k x^m}{dx^k} \right]_{x=0} \left[\frac{1}{h!} \frac{d^h \cos(\alpha y + \beta)}{dy^h} \right]_{y=0} \\
 &= \frac{\alpha^h}{h!} \delta(k - m) \cos\left(\frac{h\pi}{2} + \beta\right)
 \end{aligned}$$

□

2.5. Alur Penelitian. Adapun urutan pengerjaan penelitian ini secara singkat yaitu: (1) Diberikan beberapa kasus Persamaan Diferensial Biasa dan Parsial, (2) dicari solusi analitik dari persamaan diferensial biasa linear nonhomogen dan persamaan diferensial parsial linear nonhomogen, (3) dicari solusi dari persamaan diferensial biasa linear nonhomogen dan persamaan diferensial parsial linear nonhomogen menggunakan metode transformasi diferensial dua dimensi, (4) perbandingan grafik solusi menggunakan Maple, (5) perbandingan galat solusi numerik terhadap solusi analitik.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Solusi Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu. Diberikan persamaan diferensial biasa orde satu dengan nilai awal $y(0) = 0$ sebagai berikut

$$\frac{dy}{dx} - y = 1. \quad (13)$$

Solusi analitik dari PDB (13) diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int -1 dx} \left[\int e^{\int -1 dx} dx + C \right] \\ &= e^x \left[\int e^{-x} dx + C \right] = e^x [-e^{-x} + C] = Ce^x - 1 \end{aligned}$$

Solusi umum (13) adalah $y(x) = Ce^x - 1$, menggunakan nilai awal $y(0) = 0$, maka $C = 1$ dan diperoleh

$$y(x) = e^x - 1. \quad (14)$$

Apabila diubah kedalam bentuk deret maka Persamaan (14) menjadi

$$y(x) = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Selanjutnya dicari solusi menggunakan MTD:

- (1) Berdasarkan Teorema 9, maka Transformasi Diferensial dari $\frac{dy}{dx}$ adalah $(k+1)Y(k+1)$,
- (2) Berdasarkan Teorema 7, maka Transformasi Diferensial dari $-y$ adalah $-Y(k)$, dan
- (3) Berdasarkan Teorema 8, maka Transformasi Diferensial dari 1 adalah $\delta(k)$.

Diperoleh persamaan transformasi PDB sebagai berikut:

$$(k+1)Y(k+1) - Y(k) = \delta(k)$$

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1} [Y(k) + \delta(k)]. \quad (15)$$

Dengan nilai awal $y(0) = 0$, maka:

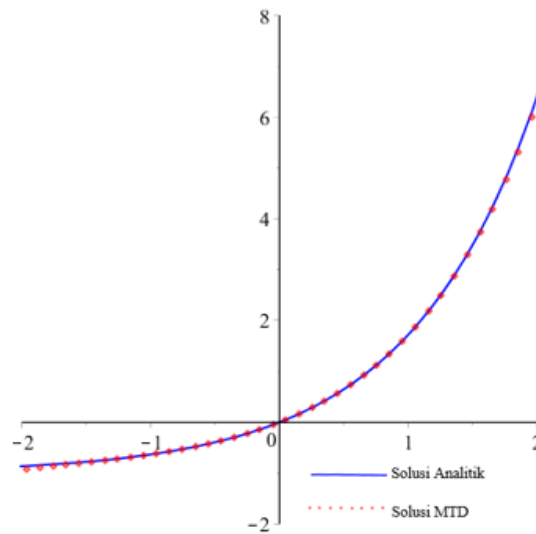
$$Y(0) = 0. \quad (16)$$

Menggunakan persamaan (15) dan (16), maka:

- untuk $k = 0 \rightarrow Y(1) = 1$
- untuk $k = 1 \rightarrow Y(2) = \frac{1}{2}$
- untuk $k = 2 \rightarrow Y(3) = \frac{1}{6}$
- untuk $k = 3 \rightarrow Y(4) = \frac{1}{24}$
- untuk $k = 4 \rightarrow Y(5) = \frac{1}{120}$

Maka solusi MTD sampai $k = 4$ dari PDB (13) adalah

$$y(x) \approx y_T(x) = \sum_{k=0}^5 Y(k) x^k = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}. \quad (17)$$



GAMBAR 1. Plot perbandingan solusi PDB orde satu

Berdasarkan Gambar 1 dapat dilihat bahwa grafik solusi analitik dan solusi MTD dari PDB orde satu menunjukkan hasil yang berhimpit pada sebagian besar permukaannya pada interval $-2 \leq x \leq 2$. Semakin banyak pengambilan k dalam kasus ini, maka kedua garis akan semakin berhimpitan.

Selanjutnya, diberikan perhitungan galat mutlak solusi PDB orde satu, $|y(x) - y_T(x)|$, pada beberapa titik. Berdasarkan Tabel 1 terlihat bahwa galat dari solusi yang diperoleh dengan menggunakan MTD cukup kecil yang menunjukkan bahwa solusi MTD mendekati solusi analitiknya.

TABEL 1. Perhitungan galat solusi PDB orde satu

x	$y(x)$	$y_T(x)$	$ y(x) - y_T(x) $
0,1	0,105170918	0,105170917	$1,40898 \times 10^{-09}$
0,2	0,221402758	0,221402667	$9,14935 \times 10^{-08}$
0,3	0,349858808	0,34985775	$1,05758 \times 10^{-06}$
0,4	0,491824698	0,491818667	$6,03097 \times 10^{-06}$
0,5	0,648721271	0,648697917	$2,3354 \times 10^{-05}$

3.2. Solusi Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua. Diberikan persamaan diferensial biasa orde dua dengan nilai awal $y(0) = 10$ dan $y'(0) = 0$ sebagai berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 24. \quad (18)$$

Solusi analitik dari PDB (18) diperoleh sebagai berikut, solusi persamaan karakteristik Persamaan (18) homogen yaitu -1 dan 2. Sehingga penyelesaian homogennya adalah $y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$. Karena ruas kanan merupakan konstanta maka

$$y_p = A_0, y_p' = 0, y_p'' = 0$$

dan dilakukan substitusi pada persamaan (18), diperoleh

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 24$$

$$0 + 3(0) + 2y_p = 24$$

$$y_p = 12.$$

Solusi umum untuk persamaan (18) adalah

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 12$$

dengan nilai awal $y(0) = 10$ dan $y'(0) = 0$ maka diperoleh solusi analitik dari PDB (18) adalah

$$y(x) = -4e^{-x} + 2e^{-2x} + 12 \quad (19)$$

Apabila diubah kedalam bentuk deret maka Persamaan (19) menjadi

$$\begin{aligned} y(x) &= -4 \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \right) + \\ &\quad 2 \left(1 - 2x + \frac{2^2 x^2}{2!} - \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^5}{5!} + \dots \right) + 12 \\ y(x) &= 10 + 2x^2 - 2x^3 + \frac{7}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^5 + \dots \end{aligned}$$

Selanjutnya dicari solusi menggunakan MTD:

- (1) Berdasarkan Teorema 9, maka Transformasi Diferensial dari $\frac{d^2 y}{dx^2}$ adalah $(k+1)(k+2)Y(k+2)$.
- (2) Berdasarkan Teorema 9, maka Transformasi Diferensial dari $3\frac{dy}{dx}$ adalah $3(k+1)Y(k+1)$.
- (3) Berdasarkan Teorema 7, maka Transformasi Diferensial dari $2y$ adalah $2Y(k)$.
- (4) Berdasarkan Teorema 8, maka Transformasi Diferensial dari 24 adalah $\delta(k)$.

Diperoleh persamaan transformasi PDB sebagai persamaan:

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) + 3(k+1)Y(k+1) + 2Y(k) = 24\delta(k)$$

$$Y(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} (-3(k+1)Y(k+1) - 2Y(k) + 24\delta(k)) \quad (20)$$

dengan nilai awal $y(0) = 10$ dan $y'(0) = 0$, maka:

$$Y(0) = 10, \quad (21)$$

$$Y(1) = 0. \quad (22)$$

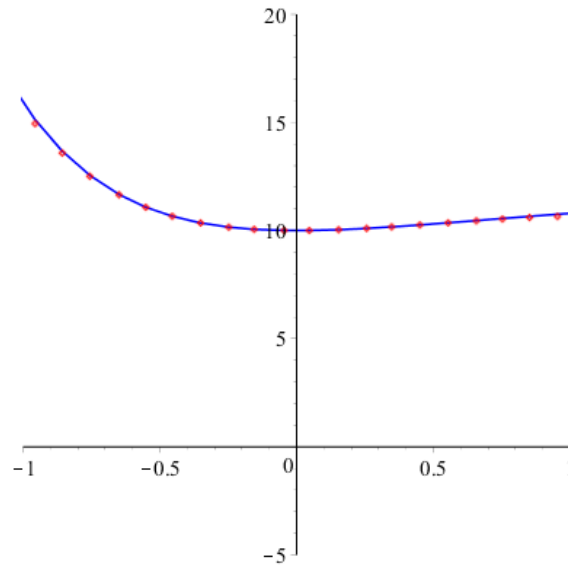
Menggunakan persamaan (20), (21) dan (22) maka:

- untuk $k = 0 \rightarrow Y(2) = 2$
- untuk $k = 1 \rightarrow Y(3) = -2$
- untuk $k = 2 \rightarrow Y(4) = \frac{7}{6}$
- untuk $k = 3 \rightarrow Y(5) = -\frac{1}{2}$

Maka solusi MTD sampai $k = 3$ dari PDB (18) adalah

$$y(x) \approx y_T(x) = \sum_{k=0}^5 Y(k) x^k = 10 + 2x^2 - 2x^3 + \frac{7}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^5. \quad (23)$$

Pada Gambar 2 diberikan plot perbandingan solusi PDB orde dua. Berdasarkan Gambar 2 dapat dilihat bahwa grafik solusi analitik dan solusi MTD dari PDB orde dua menunjukkan hasil yang berhimpit pada sebagian besar kurva pada interval $-1 \leq x \leq 1$. Semakin banyak pengambilan k dalam kasus ini, maka kedua garis akan semakin berhimpitan.



GAMBAR 2. Plot perbandingan solusi PDB orde dua

Selanjutnya, diberikan perhitungan galat mutlak solusi PDB orde dua, $|y(x) - y_T(x)|$, pada beberapa titik. Berdasarkan Tabel 2 terlihat bahwa galat dari solusi yang diperoleh dengan menggunakan MTD cukup kecil yang menunjukkan bahwa solusi MTD mendekati solusi analitiknya.

TABEL 2. Perhitungan galat solusi PDB orde dua

x	$y(x)$	$y_T(x)$	$ y(x) - y_T(x) $
0,1	10,01811183	10,01811167	$1,67345 \times 10^{-07}$
0,2	10,06571708	10,06570667	$1,04131 \times 10^{-05}$
0,3	10,13435039	10,134235	0,000115389
0,4	10,21737774	10,21674667	0,000631077
0,5	10,30963624	10,30729167	0,002344577

3.3. Solusi Persamaan Diferensial Parsial Orde Satu. Diberikan persamaan diferensial parsial orde satu dengan nilai awal $u(0, y) = e^y$ sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 2 \sin x + \cos x. \quad (24)$$

Bentuk PDP $u_x - Bu_y = Cu$ memiliki solusi umum $u(x, y) = e^{Cx} f(y + Bx)$. Oleh karena itu, solusi homogen dari persamaan (24) adalah

$$u_h(x, y) = e^{-2x} f(y + 2x).$$

Untuk mencari solusi partikular maka asumsikan $u_p(x, y) = A \sin x + B \cos x$ lalu substitusikan ke persamaan (24) sehingga

$$A \cos x - B \sin x - 2A \sin x + 2B \cos x = 2 \sin x + \cos x$$

$$(2A - B) \sin x + (A + 2B) \cos x = 2 \sin x + \cos x.$$

Oleh karena itu, $2A - B = 2$ dan $A + 2B = 1$. Dengan eliminasi dan substitusi maka diperoleh $A = 1$ dan $B = 0$, sehingga $u_p(x, y) = \sin x$. Solusi umum untuk persamaan (24) adalah

$$u(x, y) = u_h(x, y) + u_p(x, y) = e^{-2x} f(y + 2x) + \sin x, \quad (25)$$

dengan nilai awal $u(0, y) = e^y$ maka diperoleh solusi analitik dari PDP (24) adalah

$$u(x, y) = e^{-2x} f(y + 2x) + \sin x = e^{-2x} e^{y+2x} + \sin x = \sin x + e^y. \quad (26)$$

Apabila diubah kedalam bentuk deret maka Persamaan (26) menjadi

$$u(x, y) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) + \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} + \dots \right).$$

Selanjutnya dicari solusi menggunakan teorema yang berlaku pada MTDDD:

- (1) Berdasarkan Teorema 14, maka Transformasi Diferensial dari $\frac{\partial u}{\partial x}$ adalah $(k+1)U(k+1, h)$.
- (2) Berdasarkan Teorema 15, maka Transformasi Diferensial dari $-2\frac{\partial u}{\partial y}$ adalah $-2(h+1)U(k, h+1)$.
- (3) Berdasarkan Teorema 13, maka Transformasi Diferensial dari $2u$ adalah $2U(k, h)$.
- (4) Berdasarkan Teorema 18, maka Transformasi Diferensial dari $2\sin x$ adalah $\frac{2}{k!}\delta(h)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.
- (5) Berdasarkan Teorema 19, maka Transformasi Diferensial dari $\cos x$ adalah $\frac{1}{k!}\delta(h)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.

Diperoleh persamaan transformasi PDP sebagai berikut:

$$(k+1)U(k+1, h) - 2(h+1)U(k, h+1) + 2U(k, h) = \frac{2}{k!}\delta(h)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{k!}\delta(h)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right). \quad (27)$$

Dengan nilai awal $u(0, y) = e^y$, maka

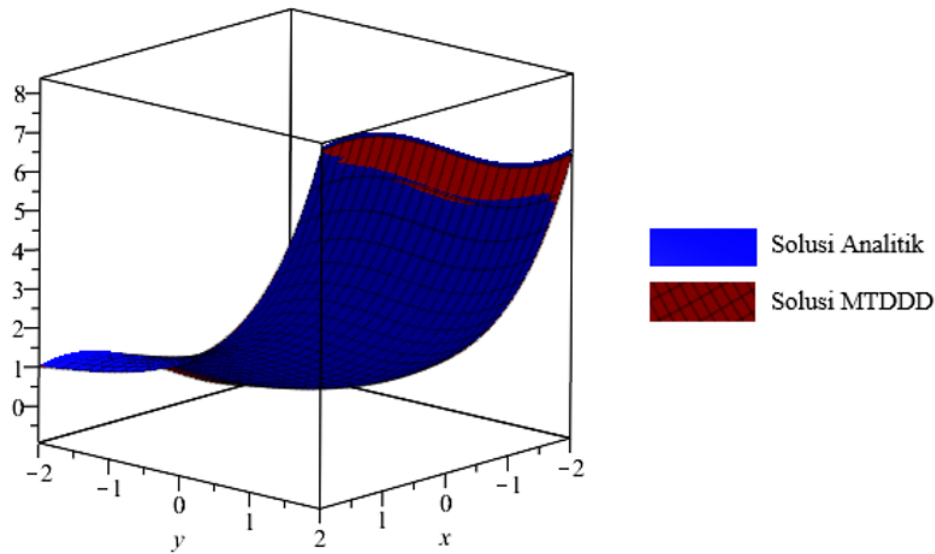
$$U(0, h) = \delta(0) \frac{1}{h!} = \frac{1}{h!}. \quad (28)$$

Menggunakan persamaan (27), (28), serta k dan h dari 0 sampai 5, maka:

- untuk $k=0$ dan $h=0$ didapat $U(1, 0) = 1$
- untuk $k=0$ dan $h=1, 2, 3, 4, 5$ didapat $U(1, 1) = U(1, 2) = U(1, 3) = U(1, 4) = U(1, 5) = 0$
- untuk $k=1$ dan $h=0, 1, 2, 3, 4, 5$ didapat $U(2, 0) = U(2, 1) = U(2, 2) = U(2, 3) = U(2, 4) = U(2, 5) = 0$
- untuk $k=2$ dan $h=0$ didapat $U(3, h) = \frac{-1}{3}!$
- untuk $k=2$ dan $h=1, 2, 3, 4, 5$ didapat $U(3, 1) = U(3, 2) = U(3, 3) = U(3, 4) = U(3, 5) = 0$
- untuk $k=3$ dan $h=0, 1, 2, 3, 4, 5$ didapat $U(4, 0) = U(4, 1) = U(4, 2) = U(4, 3) = U(4, 4) = U(4, 5) = 0$
- untuk $k=4$ dan $h=0$ didapat $U(5, 0) = \frac{1}{5}!$
- untuk $k=4$ dan $h=1, 2, 3, 4, 5$ didapat $U(5, 1) = U(5, 2) = U(5, 3) = U(5, 4) = U(5, 5) = 0$

Diperoleh solusi MTDDD dari PDP (24) adalah

$$u(x, y) \approx u_T(x, y) = \sum_{k=0}^5 \sum_{h=0}^5 U(k, h) x^k y^h = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}. \quad (29)$$



GAMBAR 3. Plot perbandingan solusi PDP orde satu

Berdasarkan Gambar 3 dapat dilihat bahwa grafik solusi analitik dan solusi MTD Dua Dimensi dari PDP orde satu menunjukkan hasil yang berhimpit pada sebagian besar permukaannya pada interval $-2 \leq x, y \leq 2$. Semakin banyak pengambilan k dan h dalam kasus ini, maka kedua bidang akan semakin berhimpitan.

Selanjutnya, diberikan perhitungan galat mutlak solusi PDP orde satu, $|u(x, y) - u_T(x, y)|$, pada beberapa titik. Berdasarkan Tabel 3 terlihat bahwa galat dari solusi yang diperoleh dengan menggunakan MTD dua dimensi cukup kecil yang menunjukkan bahwa solusi MTD pada contoh ini mendekati solusi analitiknya.

TABEL 3. Perhitungan galat solusi PDP orde satu

x	y	$u(x, y)$	$u_T(x, y)$	$ u(x, y) - u_T(x, y) $
0,1	0,1	1,205004335	1,205004333	$1,38914 \times 10^{-09}$
0,2	0,2	1,420072089	1,420072	$8,89552 \times 10^{-08}$
0,3	0,3	1,645379014	1,645378	$1,01424 \times 10^{-06}$
0,4	0,4	1,88124304	1,881237333	$5,70662 \times 10^{-06}$
0,5	0,5	2,128146809	2,128125	$2,18093 \times 10^{-05}$

3.4. Solusi Persamaan Diferensial Parsial Orde Dua. Diberikan persamaan diferensial parsial orde dua dengan nilai awal $u(x, 0) = e^x$ dan $u(0, y) = 1 + y^2$ sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 2 - y^2. \quad (30)$$

Solusi dari *auxilliary equation* untuk persamaan (30) homogen adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2 - 1 &= 0 \\ (h_1 + h_2 + 1)(h_1 + h_2 - 1) &= 0 \\ h_1 &= -1 - h_2, h_1 = 1 - h_2. \end{aligned}$$

Dari kedua akar tersebut diperoleh $u_x + u_y = -u$ dan $u_x + u_y = u$. Bentuk PDP $u_x - Bu_y = cu$ memiliki solusi umum $u(x, y) = e^{cx} f(y + Bx)$. Oleh karena itu, solusi homogen dari persamaan (30) adalah

$$u_h(x, y) = e^{-x} f_1(y - x) + e^x f_2(y - x).$$

Untuk mencari solusi partikular maka asumsikan $u_p(x, y) = Ay^2 + By + C$ lalu disubstitusikan ke persamaan (30) sehingga

$$\begin{aligned} 2A - Ay^2 + By + C &= 2 - y^2 \\ -Ay^2 + By + (2A + C) &= -y^2 + 2. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $A = 1, B = 0, 2A + C = 2 \rightarrow C = 0$, sehingga $u_p(x, y) = y^2$. Adapun solusi umum untuk persamaan (30) adalah

$$u(x, y) = u_h(x, y) + u_p(x, y) = e^{-x} f_1(y - x) + e^x f_2(y - x) + y^2. \quad (31)$$

Dengan nilai awal $u(x, 0) = e^x$ dan $u(0, y) = 1 + y^2$ solusi analitik dari PDP (30) adalah

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^{-x}(0) + e^x(1) + y^2 \\ u(x, y) &= e^x + y^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Apabila (32) ditulis dalam bentuk deret maka

$$u(x, y) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) + y^2.$$

Berdasarkan teorema yang berlaku pada MTDDD diperoleh:

- (1) Berdasarkan Teorema 14, maka Transformasi Diferensial dari $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ adalah $(k+1)(k+2)U(k+2, h)$.
- (2) Berdasarkan Teorema 16, maka Transformasi Diferensial dari $2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$ adalah $2(k+1)(h+1)U(k+1, h+1)$.
- (3) Berdasarkan Teorema 15, maka Transformasi Diferensial dari $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ adalah $(h+1)(h+2)U(k, h+2)$.
- (4) Berdasarkan Teorema 14, maka Transformasi Diferensial dari $-u$ adalah $-U(k, h)$.
- (5) Berdasarkan Teorema 12, maka Transformasi Diferensial dari 2 adalah $(k+1)U(k+1, h)$.
- (6) Berdasarkan Teorema 17, maka Transformasi Diferensial dari $-y^2$ adalah $-\delta(k)\delta(h-2)$.

Sehingga diperoleh Transformasi Diferensial dari persamaan (30) sebagai berikut

$$\begin{aligned} (k+1)(k+2)U(k+2, h) + 2(k+1)(h+1)U(k+1, h+1) + (h+1)(h+2) \\ U(k, h+2) - U(k, h) = 2\delta(k)\delta(h) - \delta(k)\delta(h-2). \end{aligned} \quad (33)$$

Dengan nilai awal $u(x, 0) = e^x$ dan $u(0, y) = 1 + y^2$, maka

$$U(k, 0) = \frac{1}{k!}\delta(0) = \frac{1}{k!} \quad (34)$$

dan

$$U(0, h) = \delta(0)\delta(h) + \delta(0)\delta(h-2) = \delta(h) + \delta(h-2). \quad (35)$$

Menggunakan persamaan (33), (34), (35) dan pengambilan k, h dari 0 sampai 5, diperoleh

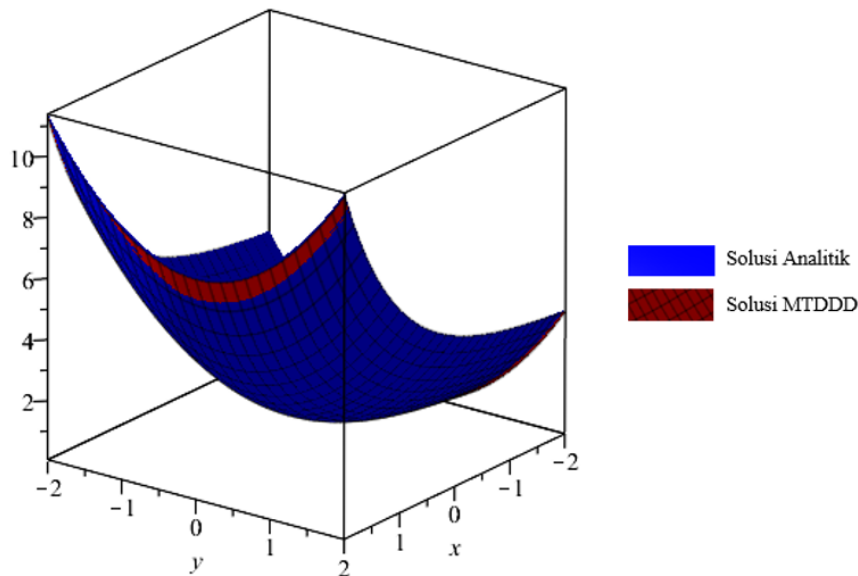
- untuk $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ dan $h = 0$ maka $U(k, h) = \frac{1}{k!}$
- untuk $k = 0$ dan $h = 1$, maka $U(0, 1) = \delta(1) + \delta(-1) = 0$
- untuk $k = 0$ dan $h = 2$, maka $U(0, 2) = \delta(2) + \delta(0) = 1$
- untuk $k = 0$ dan $h = 3$, maka $U(0, 3) = \delta(3) + \delta(1) = 0$
- untuk $k = 0$ dan $h = 4$, maka $U(0, 4) = \delta(4) + \delta(2) = 0$
- untuk $k = 0$ dan $h = 5$, maka $U(0, 5) = \delta(5) + \delta(3) = 0$

Sehingga

$$U(k, h) = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ dan } h = 0 \\ 1, & k = 0, h = 2 \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Maka solusi MTDDD dari PDP (30) adalah

$$u(x, y) \approx u_T(x, y) = \sum_{k=0}^5 \sum_{h=0}^5 U(k, h) x^k y^h = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + y^2. \quad (36)$$



GAMBAR 4. Plot perbandingan solusi PDP orde dua

Dari Gambar 4 dapat dilihat bahwa solusi analitik dan solusi MTD Dua Dimensi dari PDP orde dua menunjukkan hasil yang dekat pada interval $-2 \leq x, y \leq 2$. Semakin banyak pengambilan k dan h dalam kasus ini, maka kedua bidang akan semakin berhimpitan.

Selanjutnya, diberikan perhitungan galat mutlak solusi PDP orde dua, $|u(x, y) - u_T(x, y)|$, pada beberapa titik. Berdasarkan Tabel 4 terlihat bahwa galat dari solusi yang diperoleh dengan menggunakan MTD dua dimensi cukup kecil yang menunjukkan bahwa solusi MTD mendekati solusi analitiknya.

TABEL 4. Perhitungan galat solusi PDP orde dua

x	y	$u(x, y)$	$u_T(x, y)$	$ u(x, y) - u_T(x, y) $
0,1	0,1	1,115170918	1,115170917	$1,40898 \times 10^{-09}$
0,2	0,2	1,261402758	1,261402667	$9,14935 \times 10^{-08}$
0,3	0,3	1,439858808	1,43985775	$1,05758 \times 10^{-06}$
0,4	0,4	1,651824698	1,651818667	$6,03097 \times 10^{-06}$
0,5	0,5	1,898721271	1,898697917	$2,3354 \times 10^{-05}$

4. SIMPULAN

Pada penelitian ini, dibahas penggunaan MTD untuk mencari solusi dari PDB linear non-homogen pada beberapa contoh kasus yang belum pernah dibahas pada kajian lain. Metode ini terdiri dari tiga langkah utama yaitu mentransformasikan persamaan diferensial beserta nilai awalnya, mencari nilai-nilai transformasi dan menginverskan nilai-nilai transformasi untuk mendapatkan solusi MTD. Solusi akhir dari MTD pada kasus yang disimulasikan menghasilkan deret yang mirip dengan solusi analitik yang sudah diubah ke dalam deret Taylor. Perbandingan solusi analitik dan solusi MTD dapat terlihat dari grafik yang menunjukkan sebagian besar kurva berhimpit. Semakin banyak pengambilan k dalam mencari solusi menggunakan MTD pada kasus-kasus tersebut, maka solusi yang dihasilkan semakin mendekati solusi analitik.

MTD Dua Dimensi dapat digunakan untuk mencari solusi dari PDP linear nonhomogen pada kasus yang disimulasikan pada paper ini. Metode ini mempunyai langkah pengerjaan yang sama dengan MTD dan solusi berupa deret. Perbandingan solusi analitik dan solusi MTD Dua dimensi dapat terlihat dari grafik yang menunjukkan sebagian besar permukaan

kurva berhimpit. Semakin banyak pengambilan k dan h dalam mencari solusi menggunakan MTD Dua Dimensi pada kasus-kasus tersebut, maka solusi yang dihasilkan semakin mendekati solusi analitik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Maya, N. (2014) *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: UIN Sunan Gunung Djati Bandung.
- [2] Zhou, J. (1986) *Differential Transformation and Its Applications for Electronic Circuits*, China:Huazhong Science & Technology University Press.
- [3] Rashidi, M. M., Rabiei, F. dan Abbasbandy S. (2020) 'A Review: Differential Transform Method for Semianalytical Solution of Differential Equations', *Int. J. of Applied Mechanics and Engineering*, 25(2), pp. 122-129.
- [4] Batiha, B. (2015) 'The solution of the prey and predator problem by differential transformation method'. *International Journal of Basic and Applied Sciences*, 4(1), p.36.
- [5] Peter, O. J., Ibrahim, M. O., Oguntolu, F. A., Akinduko, O. B., & Akinyemi, S. T. (2018) 'Direct and indirect transmission dynamics of typhoid fever model by differential transform method'. *ATBU, Journal of Science, Technology & Education (JOSTE)* Vol. 6 (1).
- [6] Harir, A., Melliani, S., El Harfi, H., & Chadli, L. S. (2020). 'Variational iteration method and differential transformation method for solving the SEIR epidemic model'. *International Journal of Differential Equations*, pp. 1-7.
- [7] Batiha, A. M., & Batiha, B. (2011). 'A new method for solving epidemic model'. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 5(12), pp. 3122-3126.
- [8] Fadugba, S. E., Ali, F., & Abubakar, A. B. (2021). 'Caputo fractional reduced differential transform method for SEIR epidemic model with fractional order'. *Mathematical Modeling and Computing*, 8(3), pp. 537-548.
- [9] Ahmad, M. Z., Alsarayreh, D., Alsarayreh, A., & Qaralleh, I. (2017) 'Differential transformation method (DTM) for solving SIS and SI epidemic models'. *Sains Malaysiana*, 46(10), pp. 2007-2017.
- [10] Riyapan, P., Shuaib, S. E., Intarasit, A., & Chuarkham, K. (2021) 'Applications of the Differential Transformation Method and Multi-Step Differential Transformation Method to Solve a Rotavirus Epidemic Model.' *Mathematics and Statistics* 9(1) pp. 71-80.
- [11] Ertürk, V. S., & Momani, S. (2007) 'Comparing numerical methods for solving fourth-order boundary value problems. *Applied Mathematics and Computation*', 188(2), pp. 1963-1968.
- [12] Chen, C. K., & Ho, S. H. (1996). Application of differential transformation to eigenvalue problems. *Applied mathematics and computation*, 79(2-3), 173-188.
- [13] Momani, S., Odibat, Z., & Erturk, V. S. (2007). Generalized differential transform method for solving a space-and time-fractional diffusion-wave equation. *Physics Letters A*, 370(5-6), 379-387.
- [14] Momani, S., & Ertürk, V. S. (2008). 'Solutions of non-linear oscillators by the modified differential transform method'. *Computers & Mathematics with Applications*, 55(4), pp. 833-842.
- [15] Nourazar, S. dan Mirzabeigy, A. (2013) 'Approximate solution for nonlinear Duffing oscillator with damping effect using the modified differential transform method', *Scientia Iranica*, 20(2), pp. 364-368.
- [16] Arikoglu, A., & Ozkol, I. (2007) 'Solution of fractional differential equations by using differential transform method'. *Chaos, Solitons & Fractals*, 34(5), pp. 1473-1481.
- [17] Odibat, Z., Momani, S., & Erturk, V. S. (2008) 'Generalized differential transform method: application to differential equations of fractional order'. *Applied Mathematics and Computation*, 197(2), pp. 467-477.
- [18] Ertürk, V. S., Momani, S., & Odibat, Z. (2008). 'Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations'. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(8), pp. 1642-1654.
- [19] Arikoglu, A., & Ozkol, I. (2008). 'Comments on "Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations"', Vedat Saat Erturk, Shaher Momani, Zaid Odibat [Commun Nonlinear Sci Numer Simul 2008; 13: 1642-54]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(8), pp. 1737-1740.
- [20] Ertürk, V. S., & Momani, S. (2008) 'Solving systems of fractional differential equations using differential transform method'. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 215(1), pp. 142-151.
- [21] Odibat, Z., & Momani, S. (2008) 'A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order'. *Applied Mathematics Letters*, 21(2), pp. 194-199.
- [22] Kurulay, M., & Bayram, M. (2010) 'Approximate analytical solution for the fractional modified KdV by differential transform method'. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 15(7), pp. 1777-1782.
- [23] Cahyono, E. (2021). *Esensi dan Aplikasi Persamaan Diferensial Biasa*. Pekalongan: P.T. Nasya Expanding Management 6.
- [24] Gunawan, P. H. (2014) *Pengantar Persamaan Diferensial Parsial untuk Sains dan Teknik*. Bantul: Penerbit Sastrabook Indonesia.
- [25] Raming, I. (2023) *Pengantar Persamaan Diferensial Parsial (PDP)*. Solok: Mitra Cendekia Media.

- [26] Agboola, O. O., Opanuga, A. A., dan Gbadeyan, J. A. (2015) 'Solution of Third Order Ordinary Differential Equations Using Differential Transform Method', *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11(4), pp. 2511-2516.
- [27] Devi, S. dan Jakhar, M. (2021). 'Applications of Differential Transform Method', *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, 8(2), pp. 544-549.
- [28] Rahayu, Sugiatno, dan Prihandono, B. (2012) 'Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Tak Linear dengan Metode Transformasi Diferensial', *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, 1(1), pp. 9-14.
- [29] Jafari, H., Alipour, M. dan Tajadodi, H. (2010) 'Two-Dimensional Differential Transform Method For Solving Nonlinear Partial Differential Equations', *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, 2(1), pp. 47-52.
- [30] Naraswari, D., Kiftiah, M. dan Yudhi. (2017) 'Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Transformasi Diferensial', *Buletin Ilmiah Math. Stat dan Terapannya (Bimaster)*, 6(2), pp. 131-140.