

Dinamika *Chaos* pada Sistem Burke-Shaw Fraksional Caputo Berorde Sama

M. SHIQO FILLA, PETER JOHN, HENGKI TASMAN

Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Indonesia
Kampus UI Depok, Depok 16424

E-mail: mshiqofilla@sci.ui.ac.id, peter.john@sci.ui.ac.id, htasman@sci.ui.ac.id,

Abstrak

Kalkulus fraksional adalah topik yang secara khusus membahas tentang integral dan turunan fraksional, yakni integral dan turunan berorde bilangan riil positif. Kalkulus fraksional telah diterapkan pada berbagai bidang pemodelan, salah satunya pada model sistem dinamik yang bersifat *chaos*. Orde turunan fraksional pada suatu sistem persamaan diferensial fraksional menentukan stabilitas dari sistem tersebut. Pada artikel ini dibahas *chaos* pada sistem Burke-Shaw fraksional berorde sama. Pada model sistem Burke-Shaw fraksional, diperoleh hasil bahwa *chaos* terjadi saat orde turunan fraksional $\alpha > \alpha^*$, dengan α^* suatu konstan. Fenomena *chaos* pada sistem Burke-Shaw fraksional untuk berbagai orde turunan fraksional α diselidiki dengan mengamati potret fase dari solusi sistem dan nilai eksponen Lyapunov yang diperoleh secara numerik. Dari simulasi yang dilakukan untuk beberapa orde turunan fraksional α yang berbeda, didapat hasil yang konsisten bahwa sistem bersifat stabil untuk $\alpha < \alpha^*$, dan bersifat *chaos* saat $\alpha > \alpha^*$. Dinamik dari solusi sistem juga diamati untuk melihat sensitivitas solusi terhadap perbedaan nilai awal yang kecil.

Kata kunci: Turunan Fraksional, Sistem Dinamik, *Chaos*, Sistem Burke-Shaw.

Abstract

Fractional calculus is a topic that specifically discussed about fractional integral and fractional derivative, that is integral and derivative with order of positive real number. Fractional calculus has been applied to various fields of mathematical modelling, one of them is in the model of chaotic dynamical system. The order of fractional derivative of a fractional differential equations determines the stability of the system. In this article chaotic behavior of Burke-Shaw commensurate order fractional system is discussed. From the fractional Burke-Shaw system we obtained the result that chaos will happen when the fractional derivative order $\alpha > \alpha^*$, where α^* is a constant. Chaotic phenomenon of fractional Burke-Shaw system with various fractional derivative order α is investigated by observing the potrait phase of system's solution and Lyapunov exponents by some numerical calculations. Based on simulation that used some different values of fractional order α , we obtained consistent result that shows the system is stable for $\alpha < \alpha^*$ and is chaotic for $\alpha > \alpha^*$. The dynamic of the system's solutions is also observed to see the solution's sensitivity with small difference of initial conditions.

Keywords: Fractional derivative, Dynamical Systems, Chaos, Burke-Shaw System.

1. PENDAHULUAN

Kalkulus konvensional meliputi operator turunan dan operator integral dengan orde integer positif. Para matematikawan terdahulu berusaha memperumum konsep turunan dan integral pada lingkup yang lebih luas, yakni dengan mengubah turunan dan integral yang terbatas pada orde integer positif menjadi berorde bilangan riil positif sebarang. Kalkulus fraksional membahas turunan dan integral dengan orde bilangan riil positif sebarang beserta aplikasinya pada sains [1]. Sejatinya pembahasan terkait operator turunan dan integral dengan orde bilangan riil positif sebarang dimulai pada era yang sama dengan kalkulus konvensional. Pertama kali saat Leibniz berkomunikasi dengan L'Hospital terkait masalah turunan berorde setengah pada tahun 1695 [2]. Dengan demikian topik kalkulus fraksional dapat dikatakan telah berusia lebih dari 300 tahun. Selanjutnya berbagai nama mulai memberikan andil dalam perkembangan kalkulus fraksional, antara lain Lagrange, Lacroix, Liouville, Grunwald, Riemann, dan Letnikov.

Pada masa awal penerapannya, para matematikawan merasa ragu dan tidak cukup yakin terhadap kalkulus fraksional. Terdapat beberapa alasan, antara lain pendefinisian turunan orde fraksional yang dianggap tidak konsisten, perhitungan yang sangat berbeda dengan kalkulus orde integer, dan hampir tidak ada aplikasi praktis dari bidang ini (anggapan di masa itu). Kalkulus fraksional dianggap hanya sebatas topik abstrak yang berisikan manipulasi matematis dengan hanya sedikit ataupun tidak ada kegunaan yang dimilikinya [1]. Sifat turunan orde fraksional yang non-lokal juga menyebabkannya memiliki perbedaan dengan turunan berorde integer. Terlepas dari berbagai pemahaman tersebut, kalkulus fraksional yang sebelumnya dianggap sebatas formulasi matematika murni, dalam beberapa dekade terakhir telah bergeser menjadi alat yang dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang [1]. Sifat non-lokal yang dimiliki oleh kalkulus fraksional justru menjadikannya mampu memodelkan fenomena memori, yakni ketergantungan nilai saat ini terhadap data histori di masa lampau [3]. Model kalkulus fraksional telah diterapkan pada beberapa bidang, antara lain fisika, teknik elektro, sistem kontrol, pemrosesan sinyal, dan *bioengineering* [2].

Selain pengaplikasian pada bidang-bidang di atas, konsep kalkulus fraksional juga telah diterapkan dalam topik *chaos* pada sistem dinamik. *Chaos* adalah perilaku tak-periodik (*aperiodic*) jangka panjang pada suatu sistem deterministik yang menunjukkan adanya ketergantungan secara sensitif terhadap nilai awal [4]. Kondisi *chaos* memiliki ciri lintasan yang stabil secara global (*globally stable*) namun tidak stabil secara lokal (*locally unstable*). Pembahasan *chaos* mulai mendapatkan perhatian sejak penelitian Edward Lorenz dalam model cuaca pada tahun 1963.

Sistem yang memuat operator kalkulus fraksional disebut sistem fraksional (*fractional system*). Umumnya sistem *chaos* menggunakan sistem persamaan diferensial biasa. Namun dalam beberapa tahun terakhir, penelitian terhadap perilaku *chaos* pada sistem fraksional mendapatkan perhatian yang cukup signifikan. Telah ditunjukkan dalam berbagai penelitian bahwa *chaos* dapat terjadi pada sistem fraksional. Sebagai contoh, beberapa model sistem yang telah diteliti adanya *chaos* pada versi orde fraksionalnya antara lain model sirkuit Chua, sistem Duffing, sistem Chen, sistem Lu dan sistem Rossler [5]. Berdasarkan penelitian yang ditulis pada [5], adalah mungkin untuk menentukan batas orde bagi turunan pada sistem fraksional orde sama (*commensurate order fractional system*) sedemikian hingga kondisi *chaos* bisa terjadi. Mahmoud, dkk. [6] memperkenalkan model sistem Burke-Shaw dengan orde turunan fraksional. Sesuai dengan namanya, sistem Burke-Shaw adalah sistem yang pertama kali diformulasikan oleh Bill Burke dan Robert Shaw pada tahun 1980 [7]. Artikel ini berfokus pada sistem Burke-Shaw fraksional Caputo dengan orde sama. Pada artikel ini akan ditentukan batas orde turunan fraksional yang menyebabkan sistem Burke-Shaw fraksional orde sama (dengan parameter yang ditentukan) bersifat *chaos*. Selanjutnya dibahas pengaruh orde-orde turunan fraksional yang berbeda terhadap stabilitas dari sistem Burke-Shaw fraksional berorde sama dengan memperhatikan potret fase lintasan, diagram *time series* dan perhitungan eksponen Lyapunov yang didapat melalui metode numerik.

2. SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL

Turunan fraksional memiliki beberapa jenis. Pada artikel ini pembahasan difokuskan pada turunan fraksional Caputo yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. [8] Misal $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$. Operator **turunan fraksional Caputo** orde α didefinisikan sebagai berikut

$$({}^C D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Pada Definisi 2.1, parameter α disebut sebagai orde turunan yang bernilai riil positif. Turunan fraksional Caputo memiliki sifat yang mirip dengan turunan biasa, yaitu turunan fraksional Caputo dari fungsi konstan adalah fungsi nol.

Persamaan diferensial yang melibatkan turunan fraksional disebut **persamaan diferensial fraksional** (PDF). PDF diklasifikasikan berdasarkan jenis turunan fraksional yang digunakan, misalnya PDF Riemann-Liouville dan PDF Caputo. Pada PDF Caputo nilai awal yang digunakan memiliki orde integer, sama seperti persamaan diferensial biasa. Berikut definisi dari PDF Caputo.

Definisi 2.2. [8] *Persamaan diferensial fraksional dengan nilai awal*

$$\begin{aligned} ({}^C D_{a+}^\alpha y)(t) &= f(t, y(t)), \quad \alpha > 0, \quad t > a, \\ ({}^C D^k y)(a) &= b_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad n = \lceil \alpha \rceil, \end{aligned}$$

disebut **persamaan diferensial fraksional Caputo**.

Pada studi mengenai sistem dinamik dikenal bentuk umum dari sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Dalam notasi vektor sistem (1) dapat dinyatakan dalam bentuk $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Sistem persamaan yang serupa dengan (1) juga dikenal pada pembahasan kalkulus fraksional. **Sistem fraksional** merupakan sistem persamaan yang mengandung operator diferintegral fraksional, yakni turunan ataupun integral fraksional [9]. Sistem fraksional didapat dengan mengganti turunan pada sistem persamaan diferensial biasa (1) menjadi turunan fraksional. Bentuk umum dari sistem fraksional Caputo adalah

$$\begin{aligned} {}^C D_0^{\alpha_1} x_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ {}^C D_0^{\alpha_n} x_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{2}$$

dengan ${}^C D_0^\alpha$ merupakan operator turunan fraksional Caputo dan orde turunan $\alpha_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Jika $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ maka sistem (2) disebut **sistem fraksional orde sama** (*commensurate order fractional system*). Selain itu, sistem (2) disebut sebagai **sistem fraksional orde tak-sama** (*incommensurate order fractional system*) [3].

Berikut diperkenalkan terlebih dahulu **matriks Jacobian** untuk suatu sistem persamaan diferensial. Sederhananya, misal $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$, dan $f_1, \dots, f_n$ merupakan fungsi-fungsi yang terturunkan terhadap variabel $x_1, \dots, x_n$, maka operator turunan $D\mathbf{f}$ merupakan matriks Jacobian ukuran $n \times n$ yang berbentuk

$$D\mathbf{f} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Matriks jacobian untuk persamaan diferensial fraksional juga memiliki definisi yang sama.

Umumnya PDF Caputo ataupun sistem fraksional Caputo diselesaikan dengan metode numerik. Berikut metode numerik untuk penyelesaian PDF Caputo berdasarkan penelitian yang disusun dalam [11]. Diberikan PDF Caputo (dapat juga digunakan untuk sistem fraksional Caputo) berbentuk sebagai berikut.

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\alpha y(t) &= f(t, y(t)), \\ y(t_0) &= y_0, y'(t_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(m-1)}(t_0) = y_0^{(m-1)}, \end{aligned} \quad (3)$$

dengan $m = \lceil \alpha \rceil$. Solusi untuk masalah nilai awal (3) didapat dengan metode *predictor-corrector*. Dalam hal ini metode explicit rectangular bertindak sebagai *predictor*, dan metode *implicit trapezoidal* bertindak sebagai *corrector*. Keduanya merupakan generalisasi dari metode *multistep* Adams. Rumus untuk nilai *predictor* dan *corrector* berturut-turut ditunjukkan pada persamaan berikut.

$$\begin{aligned} y_n^P &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} y^{(k)}(t_0) + h^\alpha \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j-1}^{(\alpha)} f(t_j, y_j), \\ y_n &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} y^{(k)}(t_0) + h^\alpha \left(\tilde{a}_n^{(\alpha)} f(t_0, y_0) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j}^{(\alpha)} f(t_j, y_j) + a_0^{(\alpha)} f(t_n, y_n^P) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

dengan

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n^{(\alpha)} &= \frac{(n-1)^{\alpha+1} - n^\alpha(n-\alpha-1)}{\Gamma(\alpha+2)}, \\ a_n^{(\alpha)} &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}, & n=0, \\ \frac{(n-1)^{\alpha+1} - 2n^{\alpha+1} + (n+1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}, & n=1, 2, \dots, \end{cases} \\ b_n^{(\alpha)} &= \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Penelitian terkait perilaku kualitatif dari dinamik sistem fraksional (2) adalah salah satu pengaplikasian kalkulus fraksional yang topiknya cukup hangat dalam beberapa dekade terakhir. Orde turunan pada sistem fraksional (2) memiliki andil dalam menentukan apakah suatu sistem bersifat *chaos* ataupun stabil. Penentuan batas orde pada sistem fraksional agar bersifat *chaos* menjadi salah satu tema yang dibahas dalam topik penelitian kalkulus fraksional. Pada beberapa penelitian sebelumnya telah ditunjukkan bahwa fenomena *chaos* terjadi pada versi fraksional dari berbagai sistem, seperti sistem Chen, sistem Lu, sistem Rossler [5] dan lain-lain.

Untuk setiap sistem fraksional non-linear orde sama yang diberikan, dapat ditentukan batas orde fraksional secara teoretis sedemikian hingga kondisi *chaos* terjadi pada sistem fraksional tersebut. Batas tersebut berdasarkan pada teorema berikut.

Teorema 2.3. [2] Misal diberikan sistem fraksional otonom orde sama dan non-linear dengan nilai awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, dan orde $0 < \alpha \leq 1$

$${}^C D_0^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (5)$$

Titik setimbang E^* dari sistem (5) bersifat stabil asimtotik jika untuk semua nilai eigen $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ dari matriks Jacobian $J = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$, dengan $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ yang dievaluasi di titik setimbang E^* , memenuhi kondisi $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$.

Berdasarkan Teorema 2.3, kondisi perlu bagi orde turunan fraksional α agar sistem fraksional orde sama bersifat *chaos* dinyatakan dalam Akibat 2.4 berikut.

Akibat 2.4. Kondisi perlu bagi orde turunan fraksional pada sistem fraksional non-linear (5) agar bersifat chaos adalah

$$\alpha > \frac{2}{\pi} \min \{ |\arg(\lambda_i)|, i = 1, 2, \dots, n \}, \quad (6)$$

dengan operator $\min$ menyatakan nilai minimum.

3. SISTEM BURKE-SHAW

Sistem Burke-Shaw dirumuskan oleh Bill Burke dan Robert Shaw pada tahun 1980 [7]. Bentuk umum dari sistem persamaan diferensial Burke-Shaw adalah

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -S(x + y), \\ \dot{y} &= -y - Sxz, \\ \dot{z} &= Sxy + V, \end{aligned} \quad (7)$$

dengan x, y, z sebagai variabel keadaan (*state variables*) yang bergantung pada waktu t , dan S, V merupakan parameter real positif. Sistem Burke-Shaw pertama kali muncul pada artikel [7] dengan parameter $S = 10$ dan $V = 13$. Sistem Burke-Shaw merupakan sistem yang *invariant* terhadap penggantian variabel $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. Dengan kata lain, sistem Burke-Shaw (7) simetri terhadap sumbu z [6].

Studi mengenai sistem dinamik berkaitan erat dengan analisis perilaku titik setimbang (*equilibrium points*) dari suatu sistem. Sebagai contoh, hal yang ingin diselidiki dari lintasan suatu sistem antara lain apakah sistem bergerak menuju dan menetap pada suatu titik setimbang, bergerak secara periodik, atau ada indikasi pergerakan (dinamika) yang lebih kompleks. Berikut definisi dari titik setimbang yang lebih rinci.

Definisi 3.1 (Titik Setimbang). [10] Misal sistem nonlinear berbentuk

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (8)$$

Suatu titik $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ disebut **titik setimbang** atau **titik kritis** dari sistem (8) jika memenuhi $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

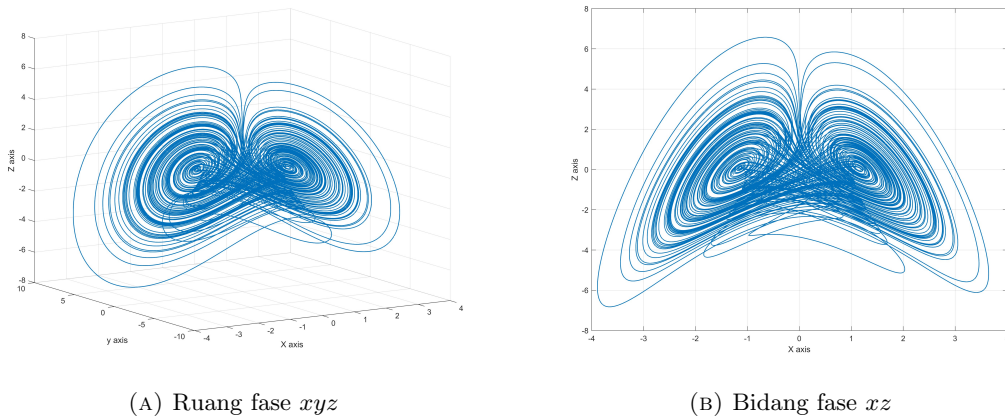
Definisi 3.2 (Titik Setimbang Hiperbolik). [10] Suatu titik setimbang $\mathbf{x}_0$ disebut sebagai **titik setimbang hiperbolik** (*hyperbolic equilibrium*) dari sistem (8) jika tidak ada nilai eigen dari matriks Jacobian $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ yang komponen realnya adalah 0.

Definisi 3.3 (*Sink, Source, dan Saddle*). [10] Titik setimbang $\mathbf{x}_0$ dari sistem (8) disebut sebagai **sink** jika semua nilai eigen dari matriks $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ memiliki komponen real negatif; disebut sebagai **source** jika semua nilai eigen dari $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ memiliki komponen real positif; dan disebut sebagai **saddle** jika $\mathbf{x}_0$ merupakan titik setimbang hiperbolik dan memiliki setidaknya satu nilai eigen dengan komponen real positif dan setidaknya satu nilai eigen dengan komponen real negatif.

Sink memiliki sifat **stabil asimtotik**, sedangkan *saddle* dan *source* bersifat tidak stabil [10]. Stabil asimtotik artinya lintasan sistem bergerak konvergen menuju ke titik setimbang. Berdasarkan Definisi 3.1, sistem Burke-Shaw (7) memiliki dua titik setimbang, yaitu:

$$E_1 = \left(\sqrt{\frac{V}{S}}, -\sqrt{\frac{V}{S}}, \frac{1}{S} \right) \text{ dan } E_2 = \left(-\sqrt{\frac{V}{S}}, \sqrt{\frac{V}{S}}, \frac{1}{S} \right). \quad (9)$$

Potret fase dari lintasan sistem Burke-Shaw (7) dengan nilai parameter $S = 10, V = 13$ dan nilai awal $(0.1, 0.1, 0.1)$ dapat dilihat pada Gambar 1. Terlihat bahwa sistem tersebut menghasilkan *strange attractor*. Pada Gambar 1a ditampilkan lintasan (*trajectory*) dari sistem pada ruang fase xyz , sedangkan pada Gambar 1b diberikan proyeksi dari lintasan sistem tersebut pada bidang fase xz . Titik setimbang E_1 dan E_2 diwakili oleh dua pusat pusaran yang terlihat pada lintasan sistem tersebut.

GAMBAR 1. *Strange attractor* sistem Burke-Shaw

4. PEMBAHASAN

Pada artikel ini dibahas sistem Burke-Shaw fraksional Caputo orde sama α , yaitu:

$$\begin{aligned} {}^C D_0^\alpha x &= -S(x + y), \\ {}^C D_0^\alpha y &= -y - Sxz, \\ {}^C D_0^\alpha z &= V + Sxy. \end{aligned} \quad (10)$$

dengan parameter $S = 10$ dan $V = 13$ dan nilai awal $(0.1, 0.1, 0.1)$. Penggunaan parameter $S = 10$ dan $V = 13$ mengikuti bentuk orisinal dari sistem Burke-Shaw yang tertulis pada [7].

Berdasarkan (9), sistem Burke-Shaw fraksional orde sama (10) memiliki dua titik setimbang, yaitu

$$E_1 = (1.1402, -1.1402, 0.1) \text{ dan } E_2 = (-1.1402, 1.1402, 0.1).$$

Matriks Jacobian J dari sistem (10) yang dievaluasi di titik setimbang $\mathbf{x}_e = (x^*, y^*, z^*)$ adalah

$$J(\mathbf{x}_e) = \begin{bmatrix} -10 & -10 & 0 \\ -10z^* & -1 & -10x^* \\ 10y^* & 10x^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Dari substitusi titik setimbang E_1 kita dapat nilai eigen dari matriks $J(E_1)$ adalah $\lambda_1 = -14.4526$, $\lambda_{2,3} = 1.7263 \pm 13.3011i$. Untuk titik setimbang E_2 kita mendapatkan himpunan nilai eigen yang sama, yakni $\lambda_1 = -14.4526$, $\lambda_{2,3} = 1.7263 \pm 13.3011i$. Dapat dilihat bahwa dengan nilai-nilai eigen yang didapatkan tersebut, baik E_1 maupun E_2 keduanya merupakan titik setimbang hiperbolik *saddle*.

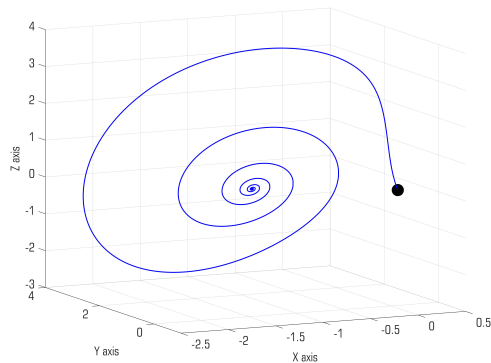
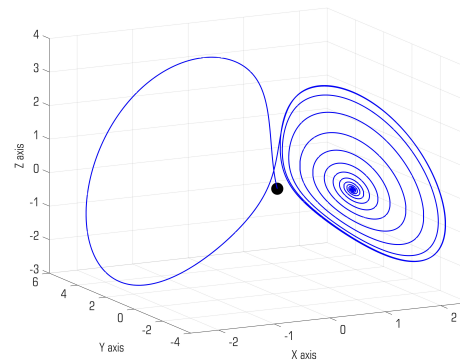
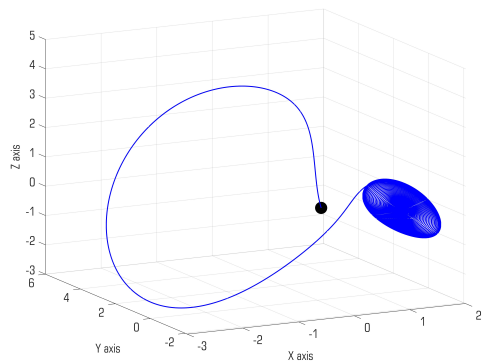
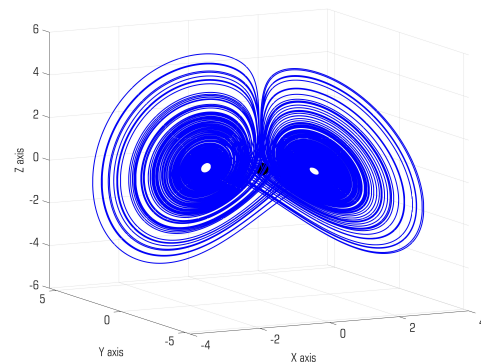
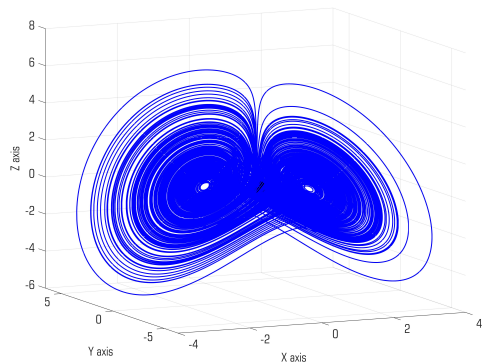
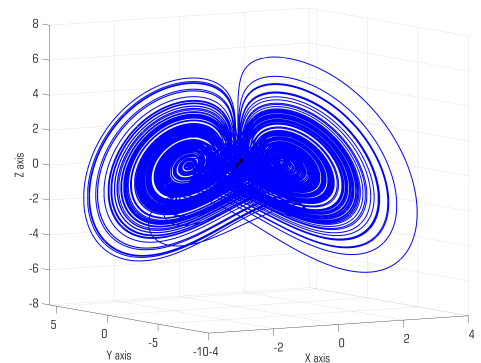
Perhatikan bahwa $\min\{|\arg(\lambda_1)|, |\arg(\lambda_2)|, |\arg(\lambda_3)|\} = |\arg(\lambda_{2,3})| \approx 1.44173$. Dengan menerapkan Akibat 2.4, batas orde fraksional agar sistem Burke-Shaw fraksional orde sama (10) bersifat *chaos* adalah

$$\alpha > \frac{2}{\pi} \min\{|\arg(\lambda_i)|, i = 1, 2, 3\} = \frac{2}{\pi} \times |\arg(\lambda_{2,3})| = 0.917 \dots$$

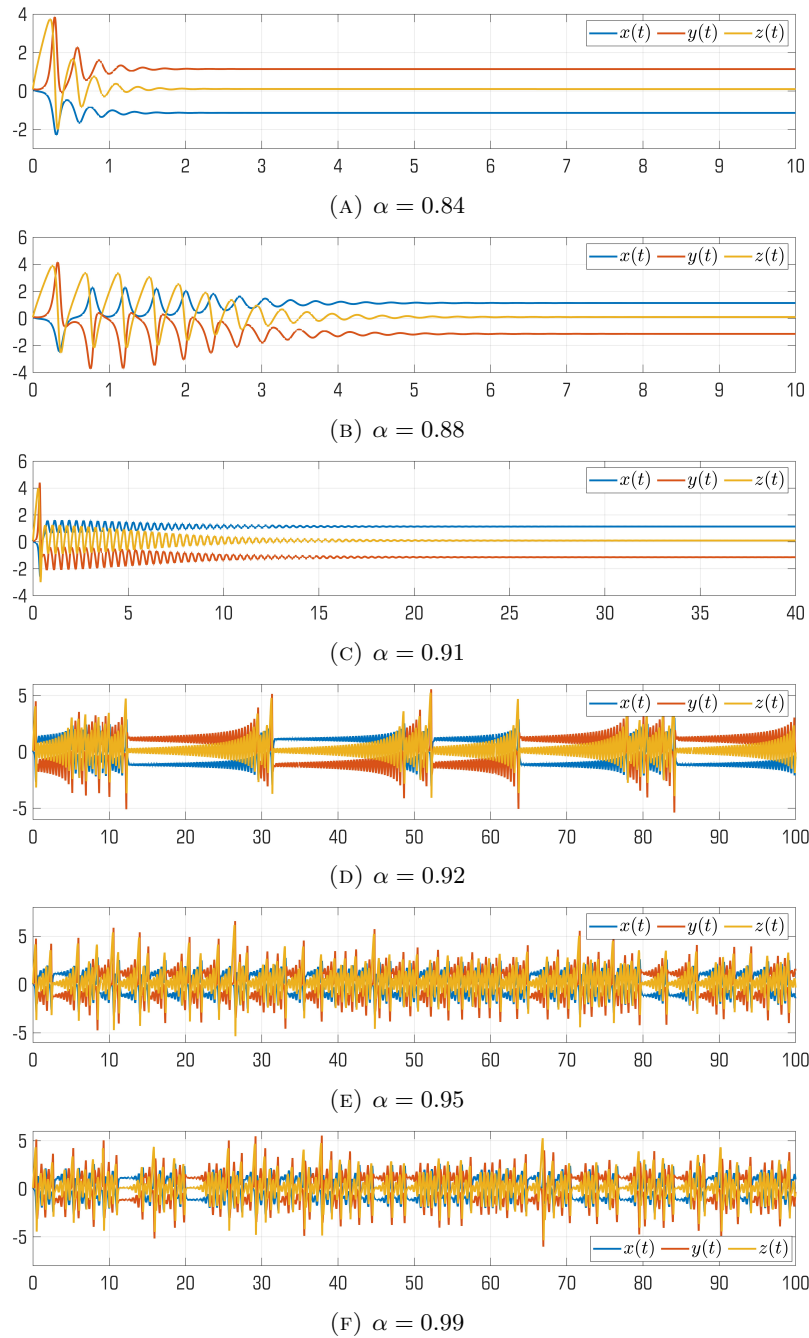
Sebaliknya, sistem akan bersifat stabil jika orde turunan $\alpha < 0.917 \dots$. Berikutnya dilakukan simulasi numerik untuk melihat perbandingan perilaku lintasan untuk beberapa orde fraksional α . Solusi numerik sistem didapatkan dengan memanfaatkan metode *predictor-corrector* pada Matlab yang disusun dalam [11].

Untuk kebutuhan simulasi, dibandingkan perilaku dari sistem Burke-Shaw fraksional Caputo orde sama α (10) dengan orde turunan yang digunakan adalah $\alpha = 0.84, 0.88, 0.91, 0.92, 0.95, 0.99$. Nilai-nilai tersebut dipilih sebagai pembanding terhadap batas orde *chaos* yang didapat pada perhitungan sebelumnya, yakni $0.917 \dots$. Pada

Gambar 2 ditampilkan perbandingan potret fase sistem Burke-Shaw (10) dengan orde-orde turunan tersebut. Dapat dilihat bahwa dari Gambar 2a, Gambar 2b, dan Gambar 2c sistem Burke-Shaw fraksional (10) mempunyai titik setimbang yang bersifat stabil untuk orde turunan $\alpha = 0.84, 0.88, 0.91$. Untuk orde turunan $\alpha = 0.92, 0.95, 0.99$, potret fasenya dapat dilihat pada Gambar 2d, Gambar 2e, dan Gambar 2f. Terlihat bahwa untuk orde-orde turunan fraksional tersebut, solusi sistem Burke-Shaw fraksional Caputo (10) membentuk *strange attractor* yang serupa dengan Gambar 1a.

(A) $\alpha = 0.84$ (B) $\alpha = 0.88$ (C) $\alpha = 0.91$ (D) $\alpha = 0.92$ (E) $\alpha = 0.95$ (F) $\alpha = 0.99$

GAMBAR 2. Dinamik *chaotic* sistem Burke-Shaw fraksional Caputo (10).



GAMBAR 3. Dinamik sistem Burke-Shaw fraksional Caputo (10)

Dinamik dari variabel keadaan $x(t)$, $y(t)$ dan $z(t)$ terhadap variabel t dapat dilihat dengan lebih jelas pada grafik runtun waktu yang ditampilkan oleh Gambar 3. Untuk orde turunan $\alpha = 0.84, 0.88, 0.91$ lintasan sistem bergerak konvergen menuju salah satu titik setimbangnya, atau dengan kata lain titik setimbang bersifat stabil asimtotik. Sedangkan untuk kasus yang lain, $\alpha = 0.92, 0.95, 0.99$, variabel-variabel keadaan pada sistem terus berosilasi dengan pola yang tidak menentu. Potret fase dan grafik runtun waktu yang ditampilkan pada Gambar 2 dan Gambar 3 ini konsisten dengan klaim bahwa sistem akan bersifat stabil pada orde turunan $\alpha < 0.917 \dots$ dan bersifat *chaos* untuk orde turunan $\alpha > 0.917 \dots$

Pada Tabel 1, ditunjukkan perbandingan nilai eksponen Lyapunov dari sistem (10) untuk setiap orde turunan α . Metode untuk menentukan eksponen Lyapunov dari suatu sistem fraksional merujuk kepada program numerik yang dikonstruksi dalam [12]. Sistem yang tidak stabil ditandai dengan adanya minimal satu nilai eksponen Lyapunov bertanda positif, sedangkan sistem yang stabil ditandai dengan nilai eksponen Lyapunov yang semuanya bertanda negatif. Dengan demikian stabilitas suatu sistem dapat diperhatikan dengan melihat tanda dari nilai eksponen Lyapunov terbesar.

Hasil yang ditunjukkan oleh Tabel 1 konsisten dengan bahasan sebelumnya, yaitu sistem yang bersifat stabil (untuk orde turunan $\alpha = 0.84, 0.88, 0.91$) akan memiliki tiga eksponen Lyapunov yang semuanya bertanda negatif, sedangkan sistem yang bersifat *chaos* (untuk orde turunan $\alpha = 0.92, 0.95, 0.99$) memiliki setidaknya satu eksponen Lyapunov bertanda positif.

TABEL 1. Eksponen Lyapunov (LE) dari sistem (10) untuk beberapa orde α

α	LE1	LE2	LE3
0.84	-2.974	-14.366	-14.422
0.88	-3.152	-12.985	-14.201
0.91	-3.128	-9.293	-18.225
0.92	5.923	-1.332	-17.564
0.95	6.032	1.100	-16.889
0.99	4.793	1.137	-14.205

Untuk melihat efek dari perturbasi pada nilai awal terhadap solusi sistem, diambil contoh pada kasus saat sistem bersifat tidak stabil, yaitu ketika orde $\alpha = 0.95$. Gambar 4 menunjukkan perbandingan solusi sistem dengan nilai awal $\mathbf{x}(0) = (0.1, 0.1, 0.1)$ dan $\mathbf{x}(0) = (0.1, 0.1, 0.100001)$, yakni ada perbedaan yang terbilang tipis (0.000001) antara koordinat z dari kedua titik awal. Terlihat bahwa pada awalnya sistem secara sekilas bergerak secara sinkron, namun seiring waktu terjadi perbedaan yang cukup signifikan pada dinamik dari setiap variabel keadaan. Selanjutnya kedua sistem dengan nilai awal yang berbeda tersebut bergerak dengan pola yang jauh berbeda satu sama lain. Hal ini merupakan ciri khas dari kondisi *chaos* yang telah umum dikenal, yakni perbedaan yang kecil pada nilai awal mengakibatkan perbedaan yang besar pada perkembangan titik-titik keadaan yang dihasilkan. Ini sekaligus juga mensimulasikan bahwa sifat ketergantungan terhadap nilai awal juga terjadi pada sistem fraksional, sebagaimana terjadi pada sistem integer.

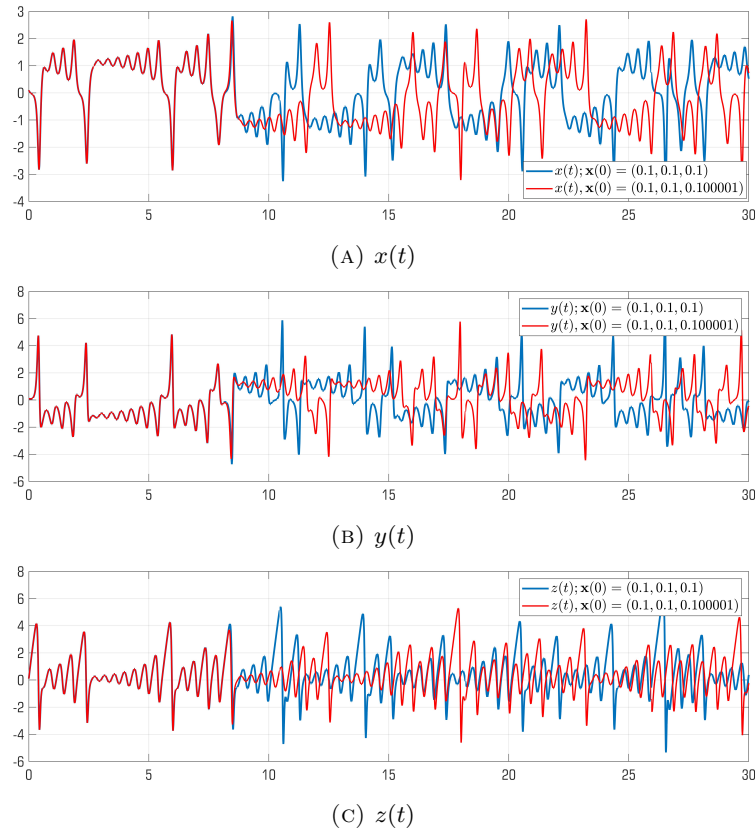
5. SIMPULAN

Sistem Burke-Shaw fraksional Caputo orde sama

$$\begin{aligned} {}^C D_0^\alpha x &= -10(x + y), \\ {}^C D_0^\alpha y &= -y - 10xz, \\ {}^C D_0^\alpha z &= 13 + 10xy, \end{aligned} \tag{11}$$

bersifat *chaos* untuk orde turunan $\alpha > 0.917 \dots$

Telah dilakukan simulasi numerik dari sistem (11) untuk beberapa orde turunan fraksional, yakni $\alpha = 0.84, 0.88, 0.91, 0.92, 0.95, 0.99$ dengan nilai awal $(0.1, 0.1, 0.1)$. Potret fase yang dihasilkan konsisten dengan ambang batas orde untuk *chaos* yang telah didapat sebelumnya, yakni sistem (11) bersifat stabil untuk orde turunan $\alpha = 0.84, 0.88, 0.91$ dan bersifat *chaos* untuk orde turunan $\alpha = 0.92, 0.95, 0.99$. Nilai eksponen Lyapunov juga dikalkulasi pada sistem (11) untuk masing-masing orde turunan, dan hasil yang didapatkan juga konsisten, yakni semua eksponen Lyapunov dari sistem yang bersifat stabil memiliki tanda negatif, sedangkan pada sistem yang bersifat *chaos* ada setidaknya satu nilai eksponen Lyapunov yang bertanda positif. Dilakukan juga simulasi



GAMBAR 4. Grafik perbandingan dinamik sistem Burke-Shaw (10) berorde $\alpha = 0.95$ dengan nilai awal $(0.1, 0.1, 0.1)$ dan $(0.1, 0.1, 0.100001)$

untuk melihat perbandingan dinamik sistem (11) dengan orde turunan $\alpha = 0.95$ saat dimulai dengan nilai awal yang berbeda namun dengan perbedaan yang sangat kecil. Terlihat bahwa sistem menunjukkan adanya sensitivitas terhadap nilai awal yang ditunjukkan oleh pola grafik yang jauh berbeda satu sama lain mulai saat waktu t tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Sabatier, J., Agrawal, O. P., dan Machado, J. A. T. (2007). *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. The Netherlands: Springer.
- [2] Petras, I. (2010). *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis, and Simulation*. Berlin: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-18101-6.
- [3] Bhalekar, S. (2011). *Investigations in Nonlinear Systems of Fractional Order*. Thesis.
- [4] Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. United States: CRC Press.
- [5] Tavazoei, M. S. dan Haeri, M. (2007). *Limitations of Frequency Domain Approximation for Detecting Chaos in Fractional Order Systems*. Nonlinear Analysis 69, pp. 1299–1320. Elsevier. <http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2007.06.030>.
- [6] Mahmoud, G.M., Arafa, A.A., Abed-Elhameed, T.M., dan Mahmoud, E.E. (2017). *Chaos Control of Integer and Fractional Orders of Chaotic Burke-Shaw System Using Time Delayed Feedback Control*. Chaos, Solitons and Fractals 104, pp. 680-192. Elsevier. <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2017.09.023>.
- [7] Shaw, R. (1980). *Strange Attractors, Chaotic Behavior and Information Flows*. Z. Naturforsch. 36a, pp. 80-112.

- [8] Milici, C., Draganescu, G., dan Machado, T. (2019). *Introduction to Fractional Differential Equations. Nonlinear Systems and Complexity*. Switzerland: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-00895-6>.
- [9] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering Vol. 198*. San Diego: Academic Press.
- [10] Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer.
- [11] Garrappa, R. (2018). *Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial*. MDPI Mathematics 2018, 6(2), 16. <http://dx.doi.org/10.3390/math6020016>.
- [12] Li, H., Shen, Y., Han Y., Dong, J., dan Li, J. (2023). *Determining Lyapunov Exponents of Fractional-Order Systems: A General Method Based on Memory Principle*. Chaos, Solitons, and Fractals 168. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113167>.

