Jurnal Matematika Integratif ISSN 1412-6184
Volume 11 No 2, Oktober 2015, pp 85 - 96

Teorema Berbasis Aksioma Separasi dalam Ruang Topologi

Albert Ch. Soewongsono, Ariyanto, Jafaruddin
Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknik Undana Kupang
Jalan Adisucipto Kampus Penfui Kupang NTT
Email: albert_soewongsono@yahoo.co.id

ABSTRAK

Pada artikel ini dikaji karakteristik dan hubungan antara aksioma-aksioma separasi dalam ruang-ruang topologi yaitu, ruang T_1, ruang T_2 (Ruang *Hausdorff*), ruang T_3, ruang T_4, dan ruang metrik. Aksioma separasi adalah suatu aksioma yang digunakan untuk mengklasifikasikan ruang-ruang topologi berdasarkan distribusi himpunan terbukanya. Metode yang digunakan dalam kajian ini adalah dengan menggabungkan premis-premis dari aksioma separasi dalam ruang-ruang topologi sehingga dapat diperoleh teorema yang menghubungkan ruang-ruang topologi. Pada kajian ini, diperoleh hubungan antara ruang-ruang topologi tersebut yakni, setiap ruang T_4 adalah ruang T_3, setiap ruang T_3 adalah ruang T_2, setiap ruang T_2 adalah ruang T_1 tetapi tidak berlaku untuk pernyataan sebaliknya. Diperoleh juga bahwa, setiap ruang metrik memenuhi semua aksioma separasi dalam ruang T_1, T_2, T_3, dan T_4. Diskusi tentang aksioma separasi dalam ruang topologi masih terbuka dengan membandingkan aksioma separasi dari ruang-ruang topologi yang lebih kompleks seperti, ruang *Tychonoff* dan ruang *Urysohn*.

Kata kunci : Aksioma separasi, ruang topologi, ruang metrik, ruang T_1, ruang T_2, ruang T_3, ruang T_4.

ABSTRACT

In this paper, examined characteristic and relationship between separation axioms in topological spaces which are, T_1 space, T_2 space (Hausdorff space), T_3 space, T_4 space, and metric space. Separation axioms are axioms that use to classified these topological spaces based on distribution of the open sets. The method that has been used in this paper is by combining premises of separation axiom in topological spaces so able to find theorems that connect these topological spaces. The results show there are relations between these topological spaces such as, every T_4 space is T_3 space, every T_3 space is T_2 space, every T_2 space is T_1 space but not the reverse statement. Also given that, every metric space fulfils all separation axioms in T_1 space, T_2 space, T_3 space, and T_4 space. The discussion about separation axiom in topological spaces is still open by comparing separation axiom in more complex topological spaces such as, Tychonoff space and Urysohn space.

Keywords **:** *Separation axioms, topological space, metric space, T_1 space, T_2 space, T_3 space, T_4 space.*

1. Pendahuluan

Pada matematika terdapat banyak cabang ilmu yang dipelajari. Salah satunya adalah matematika analisis dimana dipelajari konsep tentang sistem bilangan. Matematika analisis terbagi menjadi dua bagian yaitu, analisis real yang mempelajari konsep pada sistem bilangan real dan analisis kompleks yang mempelajari konsep pada sistem bilangan kompleks. Pada analisis real, beberapa konsep yang dipelajari antara lain, limit fungsi, derivatif, integral, dan lain-lain. Pada perkembangannnya dikenal analisis modern atau analisis abstrak. Topologi dan ruang topologi adalah salah satu cabang dari analisis ini (Apostol, 1974).

Banyak hal menarik yang dapat dipelajari dalam ruang topologi, salah satunya adalah tentang aksioma separasi dalam ruang-ruang topologi yang mengklasifikasikan ruang-ruang topologi berdasarkan distribusi himpunan terbuka (Lipschutz, 1983; Roy, 2013). Aksioma separasi yang memberikan ciri dari masing-masing ruang topologi.

Berdasarkan aksioma separasinya, dapat dicari hubungan antara ruang-ruang topologi yakni, ruang T_1, ruang T_2 (Ruang *Hausdorff*), ruang T_3, ruang T_4, dan ruang metrik. Untuk mendapatkan hubungan tersebut, prosedur penelitian yang dilakukan antara lain, pemaparan definisi ruang topologi dan ruang metrik, penjelasan aksioma-aksioma separasi dari masing-masing ruang topologi, dilanjutkan dengan elaborasi premis dari aksioma-aksioma separasi dalam ruang T_1, ruang T_2 (Ruang *Hausdorff*), ruang T_3, ruang T_4 sehingga, dapat diperoleh hubungan antara ruang T_1, ruang T_2 (Ruang *Hausdorff*), ruang T_3, ruang T_4, dan ruang metrik melalui penurunan teorema-teorema dan setelah diperoleh hubungan tersebut dapat dibentuk pengelompokkan ruang-ruang topologi dan ruang metrik dari yang mempunyai lingkup tersempit hingga yang mempunyai lingkup terluas..

Organisasi artikel ini pada bagian 2 menjelaskan definisi ruang topologi dan ruang metrik serta teorema-teorema yang diperlukan pada bagian 3 yang membahas hubungan antara ruang T_1, ruang T_2 (Ruang *Hausdorff*), ruang T_3, ruang T_4, dan ruang metrik.

2. Ruang Topologi dan Ruang Metrik

Pada bagian ini akan diberikan definisi pembentukan ruang topologi dan ruang metrik serta beberapa definisi dan teorema lain yang diperlukan dalam pembahasan pada bagian 3.

2.1 Ruang Topologi

Konsep tentang topologi dan ruang topologi berawal dari pembahasan mengenai himpunan terbuka dalam $\Re$ dimana, dibahas mengenai titik dalam, titik batas, dan titik limit (Bartle, 1992). Beberapa sifat himpunan terbuka dalam sistem bilangan real $\Re$ adalah sebagai berikut : Misalkan τ adalah keluarga semua himpunan terbuka dalam $\Re$, maka τ memenuhi sifat-sifat, (i) $\phi, \Re \in \tau$, (ii) $A_\alpha \in \tau, \forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$ dimana I adalah himpunan indeks, dan (iii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$ (Lipschutz, 1983; Korner, 2014).

Pada perkembangannya, konsep tersebut dapat diabstraksikan menjadi tidak hanya didefinisikan dalam sistem bilangan real $\Re$ melainkan pada sebarang himpunan tidak kosong X yang memenuhi beberapa sifat berikut.
Misalkan X adalah sebarang himpunan tidak kosong. τ adalah keluarga himpunan bagian terbuka dari X yang memenuhi sifat-sifat :

(i) $\phi, X \in \tau$

(ii) $A_\alpha \in \tau, \forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$

I adalah himpunan indeks

(iii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

maka, τ disebut topologi pada X dan pasangan (X, τ) disebut sebagai ruang topologi (Lipschutz, 1983; Korner, 2014).

Definisi 2.1.1. Titik Dalam (*Interior Point)* pada Ruang Topologi
Diketahui (X, τ) *adalah ruang topologi dan* $A \subset X$ *. Titik p disebut titik dalam (interior point) himpunan A bila ada* $G_p \in \tau$ *dan* $G_p \subset A$ *(Lipschutz, 1983).*

Definisi 2.1.2. Himpunan Terbuka
Himpunan A dikatakan terbuka jika semua anggotanya adalah titik dalam (interior point) dari A (Soemantri, 2004).

Teorema 2.1.3
Setiap persekitaran adalah himpunan terbuka (Bartle, 1992).

Bukti. Diambil $a \in \Re$ dan $\varepsilon > 0$. Akan ditunjukkan, $N_\varepsilon(a) = \{x \in \Re : |x - a| < \varepsilon\}$. Diambil sebarang titik $y \in N_\varepsilon(a)$. Selanjutnya, dibentuk $r = |y-a|$ dan jelas $r < \varepsilon$. Misalkan, $\delta = \varepsilon - r$ maka $\delta > 0$. Dibuat persekitaran $N_\delta(y)$ dan diambil sebarang titik $z \in N_\delta(y)$ maka diperoleh, $|z-a| \le |z-y| + |y-a| < \delta + r \;= \delta + \;(\varepsilon - \delta) = \varepsilon$ atau $|z-a| < \varepsilon$ yang berarti, $z \in N_\varepsilon(a)$. Jadi, jika $z \in N_\delta(y)$ maka $z \in N_\varepsilon(a)$ ekuivalen dengan $N_\delta(y) \subset N_\varepsilon(a)$. Sehingga, menurut definisi titik dalam (*interior point*), *y* merupakan titik dalam $N_\varepsilon(a)$. Selanjutnya, karena *y* diambil sebarang maka terbukti bahwa persekitaran $N_\varepsilon(a)$ merupakan himpunan terbuka.

Definisi 2.1.4. Topologi Diskrit
Misalkan X adalah suatu himpunan tidak kosong dan τ *adalah himpunan kuasa dari X maka,* τ *disebut topologi diskrit pada X (Lipschutz, 1983).*

2.2 Ruang Metrik

Misalkan *X* adalah sebarang himpunan tidak kosong.

(i) Fungsi $d : X \times X \to \Re$ yang memenuhi sifat-sifat :

$(M_1) d(x,y) \ge 0,\ \forall x, y \in X$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

$(M_2) d(x,y) = d(y,x)\ \forall x, y \in X,$

$(M_3) d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

$\forall x, y, z \in X.$

Disebut metrik atau jarak pada *X*.

(ii) Himpunan *X* dilengkapi dengan suatu metrik *d*, dituliskan dengan (X, d) disebut ruang metrik. Jika metriknya telah diketahui maka ruang metrik cukup ditulis *X* saja.

(iii) Anggota ruang metrik (X, d) disebut titik dan untuk setiap $x, y \in X,$ bilangan non negatif $d(x, y)$ disebut jarak titik *x* dengan titik *y* (Darmawijaya, 1998; Ampang, 2011).

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas mengenai aksioma separasi dalam ruang T_1, ruang T_2 (Ruang *Hausdorff*), ruang T_3, dan ruang T_4 sehingga, dapat diperoleh teorema yang menghubungkan ruang-ruang topologi tersebut dan ruang metrik. Sebelum itu, akan diberikan definisi yang menghubungkan ruang metrik dan ruang topologi sebagai berikut.

Misalkan *d* adalah sebuah metrik pada himpunan tidak kosong *X*. Suatu topologi τ pada *X* yang dihasilkan oleh kelas dari persekitaran dalam *X* disebut topologi metrik atau topologi yang dihasilkan oleh metrik *d*. Selanjutnya, himpunan *X* dengan topologi τ yang dihasilkan oleh metrik *d* dinamakan, ruang metrik dan dinotasikan oleh (X, d) (Lipschutz, 1983).

Dengan demikian, suatu ruang metrik adalah ruang topologi dimana topologinya dihasilkan oleh sebuah metrik. Oleh karena itu, semua konsep yang didefinisikan dalam ruang topologi juga didefinisikan dalam ruang metrik (Lipschutz, 1983; Darmawijaya, 1998). Akibatnya, dapat dicari hubungan antara ruang metrik dan ruang-ruang topologi lainnya dengan mengambil suatu topologi yang dihasilkan oleh suatu metrik.

3.1 Hubungan Aksioma Separasi dalam Ruang T_1 dan T_2

Definisi 3.1.1. Aksioma Separasi dalam Ruang T_1
Ruang topologi (X,τ) disebut ruang T_1 jika untuk setiap $p,q\in X$ dengan $p\neq q$ terdapat $G,H\in\tau$ sedemikian sehingga $p\in G, p\notin H$ dan $q\notin H, q\notin G$.

Teorema 3.1.2
Ruang topologi (X,τ) merupakan ruang T_1 jika dan hanya jika untuk setiap $x\in X$, singleton $\{x\}$ adalah himpunan tertutup.

Bukti.
$(\Rightarrow)$ Diketahui bahwa (X,τ) merupakan ruang T_1.
Diambil sebarang $p\in X$ dan didefinisikan : $\{p\}$ adalah singleton.
Diambil sebarang $q\in\{p\}^c\subset X$ maka, $p\neq q$ sebab $\{p\}^c\cap p=\varnothing$. Karena (X,τ) adalah ruang T_1 maka terdapat $G,H\in\tau$ dengan $p\in G, p\notin H$ dan $q\in H, q\notin G$.
Jadi, $\exists H\in\tau$ dengan sifat $q\in H, p\notin H$ dan $H\subset\{p\}^c$.
Menurut Definisi 2.1.1 tentang titik dalam (*interior point*) pada himpunan terbuka maka, q titik dalam (*interior point*) himpunan $\{p\}^c$. Karena q diambil sebarang maka $\{p\}^c$ himpunan terbuka dan $\{p\}$ himpunan tertutup. Jadi, terbukti bahwa apabila (X,τ) merupakan ruang T_1 maka setiap singleton dari X adalah tertutup.
$(\Leftarrow)$ Diketahui bahwa setiap singleton dari X adalah himpunan tertutup.
Diambil sebarang $p,q\in X$ dan $p\neq q$. Dibentuk $\{p\}$ dan $\{q\}$ singleton akibatnya, $\{p\}$ dan $\{q\}$ tertutup. Selanjutnya didefinisikan : $G=\{p\}^c$ dan $H=\{q\}^c$ maka, G dan H terbuka.
Jelas bahwa, $p\in H, p\notin G$ dan $q\in G, q\notin H$.
Jadi, $\forall p,q\in X, \exists G,H\in\tau\ni p\in H, p\notin G$ dan $q\in G, q\notin H$. Dari Definisi 3.1.1 tentang ruang T_1, terbukti bahwa (X,τ) merupakan ruang T_1.
Dari bukti syarat perlu dan syarat cukup maka, Teorema 3.1.2 terbukti.

Definisi 3.1.3. Aksioma Separasi dalam Ruang T_2
Ruang topologi (X,τ) merupakan ruang T_2 (Ruang Hausdorff) jika untuk setiap $p,q\in X$ dengan $p\neq q$, terdapat $G,H\in\tau\ni p\in G, q\in H$ dan $G\cap H=\varnothing$.

Teorema 3.1.4
Setiap ruang T_2 (Ruang Hausdorff) merupakan ruang T_1.

Bukti. Misalkan (X,τ) adalah ruang topologi dan diketahui bahwa (X,τ) adalah ruang T_2. Ambil sebarang $p,q\in X$ dengan $p\neq q$. Karena (X,τ) adalah ruang T_2 maka, $\exists G,H\in\tau\ni p\in G$ dan $q\in H$, $G\cap H=\varnothing$. Karena, $p\in G$, $q\in H$ dan $G\cap H=\varnothing$ maka, $p\notin H, q\notin G$.
Jadi, $\exists G,H\in\tau\ni p\in G, p\notin H$ dan $q\in H, q\notin G$ sehingga, menurut Definisi 3.1.1 terbukti bahwa (X,τ) adalah ruang T_1.

Akibat 3.1.5
Tidak semua ruang T_1 adalah ruang T_2 (Ruang Hausdorff).

 ISSN 1412-6184

Bukti. Andaikan pernyataan salah maka setiap ruang T_1 adalah ruang T_2. Ambil sebarang $p, q \in X$ dengan $p \neq q$ maka, $\exists G, H \in \tau \ni p \in G,\ q \in H$ dan $G \cap H = \varnothing$. Karena, $G, H \in \tau$ maka, G dan H adalah himpunan terbuka tidak berhingga sebab G^c dan H^c adalah himpunan tertutup dan berhingga. Karena, $G \cap H = \varnothing$ maka $G \cap H^c \neq \varnothing$ dan $G \subset H^c$. Pernyataan $G \subset H^c$ tidak mungkin terjadi sebab, G tidak berhingga dan H^c berhingga. Jadi, pengandaian salah dan pernyataan benar yakni, tidak semua ruang T_1 adalah ruang T_2.

3.2 Hubungan Aksioma Separasi dalam Ruang T_2 dan T_3

Definisi 3.2.1: Aksioma Separasi dalam Ruang Regular
Ruang topologi (X, τ) *adalah ruang regular jika untuk setiap himpunan tertutup* $F \subset X$ *dan* $p \in X, p \notin F$ *maka, terdapat* $G, H \in \tau$ $, G \cap H = \varnothing \ni F \subset G$ *dan* $p \in H$.

Definisi 3.2.2: Aksioma Separasi dalam Ruang T_3
Ruang topologi (X, τ) *merupakan ruang* T_3 *apabila* (X, τ) *adalah ruang regular dan memenuhi aksioma separasi dalam ruang* T_1*. Selanjutnya, ruang* T_3 *disebut juga sebagai ruang regular* T_1*.*

Teorema 3.2.3
Setiap ruang T_3 *adalah ruang* T_2*.*

Bukti. Diketahui (X, τ) adalah ruang T_3. Diambil sebarang $p, q \in X, p \neq q$. Dibentuk singleton $\{p\}$ sedemikian sehingga $\{p\}$ tertutup. Jelas bahwa, $q \notin \{p\}$ sebab, $p \neq q$. Karena (X, τ) adalah ruang T_3 maka, (X, τ) adalah ruang regular sehingga, $\exists G, H \in \tau$ $, G \cap H = \varnothing \ni \{p\} \subset G$ dan $q \in H$. Jelas bahwa, $p \in G$ sebab, $\{p\} \subset G$ dan $p \in \{p\}$.
Jadi, $\exists G, H \in \tau \ni p \in G, q \in H$ dan $G \cap H = \varnothing$. Sehingga, menurut Definisi 3.1.3 tentang ruang T_2, terbukti bahwa (X, τ) merupakan ruang T_2.

Sifat 3.2.4
Tidak semua ruang regular merupakan ruang T_1*.*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa pernyataan benar dengan menggunakan sebuah contoh penyangkal berikut.
Pandang suatu ruang topologi (X, τ) dimana $X = \{a, b, c\}$ dan $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ adalah suatu topologi pada X. Akan ditunjukkan bahwa (X, τ) adalah ruang regular. Karena $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ maka, himpunan-himpunan tertutup pada X adalah,
X sebab, $X^c = \varnothing \in \tau$ terbuka.
$\varnothing$ sebab, $\varnothing^c = X \in \tau$ terbuka.
$\{a\}$ sebab, $\{a\}^c = \{b, c\} \in \tau$ terbuka.
$\{b, c\}$ sebab, $\{b, c\}^c = \{a\} \in \tau$ terbuka.
Dimana, himpunan-himpunan bagian tertutup dari X dan memenuhi aksioma separasi dalam ruang regular yakni,
(i) Untuk $\varnothing \subset X$ berlaku,

$a \in X, a \notin \varnothing$ maka $\exists G = \{a\}, H = \{b, c\} \in \tau, G \cap H = \varnothing \ni \varnothing \subset H$ dan $a \in G$.

$b \in X, b \notin \varnothing$ maka $\exists G = \{a\}, H = \{b, c\} \in \tau, G \cap H = \varnothing \ni \varnothing \subset G$ dan $b \in H$.

$c \in X, c \notin \varnothing$ maka $\exists G = \{a\}, H = \{b,c\} \in \tau, G \cap H = \varnothing \ni \varnothing \subset G$ dan $c \in H.$

Jadi, $\varnothing \subset X$ memenuhi aksioma separasi dalam ruang regular.

(ii) Untuk $\{a\} \subset X$ berlaku,

$b \in X, b \notin \{a\}$ maka $\exists G = \{a\}, H = \{b,c\} \in \tau, G \cap H = \varnothing \ni \{a\} \subset G$ dan $b \in H.$

$c \in X, c \notin \{a\}$ maka $\exists G = \{a\}, H = \{b,c\} \in \tau, G \cap H = \varnothing \ni \{a\} \subset G$ dan $c \in H.$

Jadi, $\{a\} \subset X$ memenuhi aksioma separasi dalam ruang regular.

(iii) Untuk $\{b,c\} \subset X$ berlaku,

$a \in X, a \notin \{b,c\}$ maka $\exists G = \{a\}, H = \{b,c\} \in \tau, G \cap H = \varnothing \ni \varnothing \subset H$ dan $a \in G.$

Jadi, $\{b,c\} \subset X$ memenuhi aksioma separasi dalam ruang regular.

Dari (i), (ii) dan (iii) terbukti bahwa (X,τ) adalah ruang regular. Akan tetapi, (X,τ) bukan merupakan ruang T_1 sebab, terdapat sebuah singleton $\{b\}$ yang tidak tertutup. Terbukti bahwa tidak semua ruang regular merupakan ruang T_1.

Akibat 3.2.5. Syarat Cukup Suatu Ruang Regular Merupakan Ruang T_1

Jika suatu ruang regular (X,τ) dengan τ adalah suatu topologi diskrit maka (X,τ) merupakan ruang T_1.

Bukti. Diketahui (X,τ) adalah suatu regular dengan τ adalah suatu topologi diskrit yakni, $\tau = 2^x, \forall x \in X$. Ambil sebarang $p,q \in X, p \neq q$ dan dibentuk singleton $\{p\},\{q\} \subset X$. Jelas bahwa, $\{p\}$ dan $\{q\}$ adalah himpunan tertutup sebab, $\{p\}^c, \{q\}^c \in \tau = 2^x$.

Dipilih, $F = \{p\} \subset X$ dan $q \in X, q \notin F = \{p\}$ sebab, $p \neq q$. Karena, (X,τ) adalah ruang regular maka, $\exists G,H \in \tau, G \cap H = \varnothing \ni F = \{p\} \subset G$ dan $q \in H$.

Jelas bahwa, $p \in G$ sebab, $p \in \{p\}$ dan $\{p\} \subset G$ tetapi, $p \notin H$ sebab, $G \cap H = \varnothing$. Berlaku juga $q \in H, q \notin G$ sebab, $G \cap H = \varnothing$.

Jadi, $\exists G,H \in \tau \ni p \in G \setminus H$ dan $q \in H \setminus G$. Sehingga, menurut Definisi 3.1.1 tentang ruang T_1 terbukti bahwa, ruang regular (X,τ) juga merupakan ruang T_1.

3.3 Hubungan Aksioma Separasi dalam Ruang T_3 dan T_4

Definisi 3.3.1. Aksioma Separasi dalam Ruang Normal

Ruang topologi (X,τ) adalah ruang normal jika untuk setiap F_1 dan F_2 masing-masing adalah himpunan bagian tertutup dari X yang saling lepas maka, $\exists G,H \in \tau, G \cap H = \varnothing \ni$ $F_1 \subset G$ *dan* $F_2 \subset H.$

Definisi 3.3.2. Aksioma Separasi dalam Ruang T_4

Ruang topologi (X,τ) adalah ruang T_4 apabila, (X,τ) merupakan ruang normal dan memenuhi aksioma separasi dalam ruang T_1. Selanjutnya, ruang T_4 dikenal juga sebagai ruang normal T_1.

Teorema 3.3.3

Setiap ruang T_4 adalah ruang T_3.

Bukti. Diketahui bahwa (X,τ) adalah ruang T_4. Diambil sebarang $F \subset X$ merupakan himpunan bagian tertutup dan $p \in X, p \notin F.$

Karena (X,τ) adalah ruang T_4 maka, (X,τ) merupakan ruang T_1. Dibentuk singleton $\{p\}$ himpunan tertutup. Jelas bahwa, $F \cap \{p\} = \varnothing$ sebab, $p \notin F.$ Selanjutnya, karena (X,τ)

adalah ruang T_4 maka, (X,τ) adalah ruang normal sehingga, $\exists G,H \in \tau, G \cap H = \varnothing \ni F \subset G$ dan $\{p\} \subset H$. Karena, $p \in \{p\}$ dan $\{p\} \subset H$ maka, $p \in H$.

Jadi, $\exists G,H \in \tau, G \cap H = \varnothing \ni F \subset G$ dan $p \in H$. Sehingga, menurut Definisi 3.2.1, (X,τ) adalah ruang regular. Karena, (X,τ) adalah ruang regular dan ruang T_1 maka, berdasarkan Definisi 3.2.2 terbukti bahwa (X,τ) adalah ruang T_3.

Sifat 3.3.4
Tidak semua ruang normal adalah ruang T_1.
Bukti. Akan dibuktikan sifat tersebut dengan menggunakan sebuah contoh penyangkal berikut.
Misalkan $X = \{a,b,c\}$ dan $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ adalah topologi pada X. Akan ditunjukkan bahwa (X,τ) merupakan ruang normal.
Karena $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ maka, himpunan-himpunan tertutup dari X, adalah:
$\varnothing$ sebab, $\varnothing^c = X \in \tau$ himpunan terbuka.
X sebab, $X^c = \varnothing \in \tau$ himpunan terbuka.
$\{b,c\}$ sebab, $\{b,c\}^c = \{a\} \in \tau$ himpunan terbuka.
$\{a,c\}$ sebab, $\{a,c\}^c = \{b\} \in \tau$ himpunan terbuka.
$\{c\}$ sebab, $\{c\}^c = \{a,b\} \in \tau$ himpunan terbuka.
Dari himpunan-himpunan tertutup di atas, dapat dilihat bahwa himpunan-himpunan tertutup yang saling lepas yaitu, $F_1 = \varnothing$ dan $F_2 = X$ atau $\{b,c\}$ atau $\{a,c\}$ atau $\{c\}$ $\ni \exists G = \varnothing$, $H = X \in \tau$ dimana, $G \cap H = \varnothing \cap X = \varnothing$ dan berlaku $F_1 = \varnothing \subset G$ dan $F_2 \subset H$. Jadi, terbukti bahwa (X,τ) di atas merupakan suatu ruang normal. Akan tetapi, (X,τ) di atas bukan merupakan ruang T_1 sebab, terdapat sebuah singleton $\{a\} \subset X$ yang tidak tertutup.
Terbukti bahwa tidak semua ruang normal adalah ruang T_1.

Akibat 3.3.5. Syarat Cukup Suatu Ruang Normal Merupakan Ruang T_1
Jika (X,τ) merupakan suatu ruang normal dengan τ adalah suatu topologi diskrit maka, (X,τ) merupakan ruang T_1.

Bukti. Diketahui (X,τ) adalah suatu ruang normal dengan τ adalah suatu topologi diskrit yakni, $\tau = 2^x, \forall x \in X$.
Diambil sebarang $p,q \in X$ dengan $p \neq q$. Dibentuk singleton $F_1 = \{p\}$, $F_2 = \{q\} \subset X$.
Jelas bahwa, $F_1 = \{p\}$ dan $F_2 = \{q\}$ himpunan tertutup sebab, $\{p\}^c, \{q\}^c \in \tau = 2^x$ dengan $F_1 \cap F_2 = \{p\} \cap \{q\} = \varnothing$. Karena, (X,τ) adalah ruang normal maka, $\exists G,H \in \tau, G \cap H = \varnothing \ni$ $F_1 = \{p\} \subset G$ dan $F_2 = \{q\} \subset H$.
Jelas bahwa, $p \in G$ sebab, $p \in \{p\} = F_1$ dan $F_1 = \{p\} \subset G$ tetapi, $p \notin H$ sebab, $G \cap H = \varnothing$.
Berlaku juga, $q \in H$ sebab, $q \in \{q\} = F_2$ dan $F_2 = \{q\} \subset H$ tetapi, $q \notin G$ sebab, $G \cap H = \varnothing$.
Jadi $\exists G,H \in \tau \ni p \in G \setminus H$ dan $q \in H \setminus G$. Sehingga, menurut Definisi 3.1.1 tentang ruang T_1 terbukti bahwa, ruang normal (X,τ) merupakan ruang T_1.

3.4 Hasil Utama: Teorema Fundamental Separasi dalam Ruang Topologi

Pada bagian ini, akan diberikan kumpulan teorema yang menghubungkan ruang metrik dengan ruang-ruang topologi yang dinamakan teorema fundamental separasi dalam ruang topologi.

Teorema 3.4.1
Setiap ruang metrik merupakan ruang T_1.

Bukti. Didefinisikan (X,d) adalah ruang metrik. Diambil sebarang $p,q \in X$ dengan $p \neq q$. Karena (X,d) adalah ruang metrik maka, $d(p,q) > 0$. Selanjutnya, dibentuk persekitaran $N_r(p)$ dan $N_r(q)$ dengan $r = \frac{1}{2}d(p,q)$.

Akibatnya, diperoleh $N_r(p) \cap N_r(q) = \varnothing$. Menurut Teorema 2.1.3 $N_r(p)$ dan $N_r(q)$ adalah himpunan terbuka. Akibatnya, $N_r(p), N_r(q) \in \tau$. Jelas bahwa, $p \in N_r(p), p \notin N_r(q)$ dan $q \in N_r(q), q \notin N_r(p)$ sebab, $N_r(p) \cap N_r(q) = \varnothing$.

Jadi, $\exists N_r(p), N_r(q) \in \tau \ni p \in N_r(p)$, $p \notin N_r(q)$ dan $q \in N_r(q), q \notin N_r(p)$. Sehingga, terbukti bahwa (X,d) adalah ruang T_1.

Teorema 3.4.2.
Setiap ruang metrik merupakan ruang T_2 (Ruang Hausdorff).

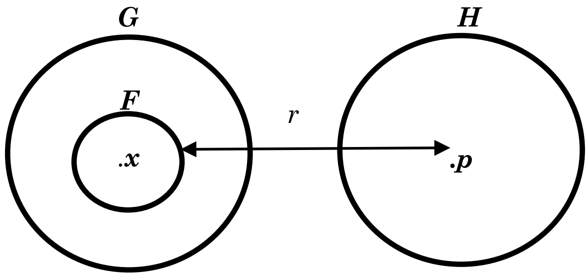
Bukti. Didefinisikan (X,d) adalah ruang metrik. Selanjutnya, diambil sebarang $p,q \in X$ dengan $p \neq q$. Karena (X,d) adalah ruang metrik maka, $d(p,q) > 0$. Dibentuk persekitaran $N_r(p)$ dan $N_r(q)$ dengan, $r = \frac{1}{2}d(p,q)$. Akibatnya, diperoleh $N_r(p) \cap N_r(q) = \varnothing$. Dari Teorema 2.1.3, $N_r(p)$ dan $N_r(q)$ adalah himpunan terbuka. Akibatnya, $N_r(p), N_r(q) \in \tau$. Selanjutnya diperoleh, $p \in N_r(p), p \notin N_r(q)$ dan $q \in N_r(q), q \notin N_r(p)$ sebab $N_r(p) \cap N_r(q) = \varnothing$.

Jadi, $\exists N_r(p), N_r(q) \in \tau \ni p \in N_r(p), q \in N_r(q)$ dan $N_r(p) \cap N_r(q) = \varnothing$. Sehingga, terbukti bahwa (X,d) merupakan ruang T_2.

Teorema 3.4.3
Setiap ruang metrik merupakan ruang T_3.

Bukti. Misalkan τ adalah suatu topologi pada X oleh metrik atau jarak d. Ambil sebarang himpunan tertutup $F \subset X$ dan $p \in X, p \notin F$. Sehingga, $\exists r > 0, \forall x \in F$ berlaku $d(x,p) > r > 0$. Dibentuk : $G = \bigcup_{x \in F} N_{r/4}(x)$ dan $H = N_{r/4}(p)$ dimana, menurut Teorema 2.1.3, G dan H adalah himpunan terbuka. Sehingga, $G, H \in \tau$ dan $G \cap H = \varnothing$.

Jurnal Matematika Integratif
Volume 11 No 2, Oktober 2015, pp 85 - 96 ISSN 1412-6184



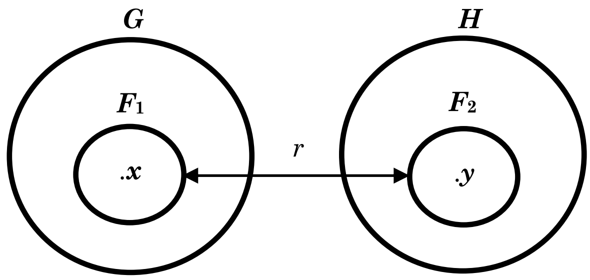
Gambar 1. Abstraksi pembentukan G dan H

Jadi $\exists G, H \in \tau, G \cap H = \varnothing \ni F \subset G$ dan $p \in H$. Menurut definisi ruang regular, dapat disimpulkan bahwa (X, d) merupakan ruang regular.

Berdasarkan Teorema 3.4.1, telah ditunjukkan bahwa (X, d) merupakan ruang T_1. Karena, (X, d) memenuhi aksioma separasi dalam ruang regular dan ruang T_1 maka menurut definisi ruang T_3 terbukti bahwa (X, d) merupakan ruang T_3.

Teorema 3.4.4
Setiap ruang metrik merupakan ruang T_4.

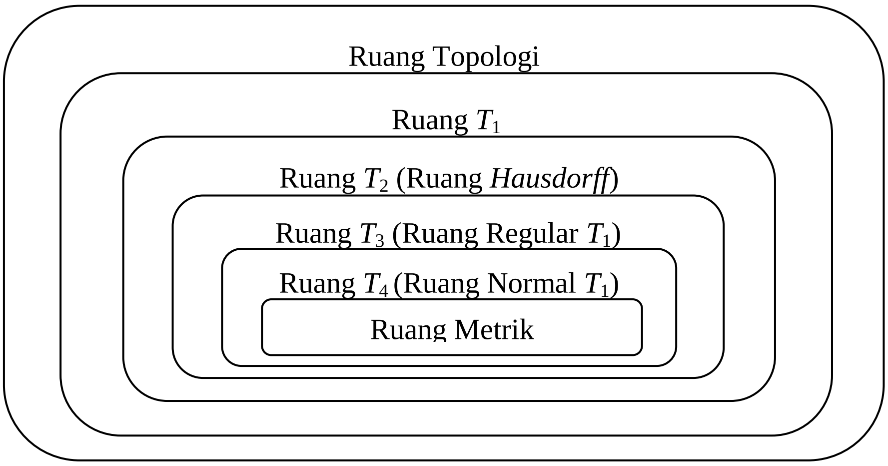
Bukti. Misalkan τ adalah topologi pada X oleh metrik atau jarak d. Diambil sebarang himpunan-himpunan bagian tertutup $F_1, F_2 \subset X$ dengan, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Sehingga, $\exists r > 0, \forall x \in F_1, y \in F_2$ dengan, $d(x, y) > r > 0$.
Dibentuk : $G = \bigcup_{x \in F_1} N_{r/4}(x)$ dan $H = \bigcup_{y \in F_2} N_{r/4}(y)$ dimana , dari Teorema 2.1.3 diperoleh, G dan H himpunan terbuka. Sehingga, $G, H \in \tau$ dan $G \cap H = \varnothing$.



Gambar 2. Abstraksi pembentukan G dan H

Jadi $\exists G, H \in \tau, G \cap H = \varnothing \ni F_1 \subset G$ dan $F_2 \subset H$. Menurut definisi ruang normal, dapat disimpulkan bahwa (X, d) adalah ruang normal. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 3.4.1, telah ditunjukkan bahwa (X, d) merupakan ruang T_1. Karena (X, d) memenuhi aksioma separasi dalam ruang normal dan ruang T_1 maka terbukti bahwa (X, d) merupakan ruang T_4.

Dari Teorema 3.4.1, Teorema 3.4.2, Teorema 3.4.3, dan Teorema 3.4.4 dapat dikatakan bahwa suatu ruang metrik memenuhi semua aksioma separasi dalam ruang-ruang topologi yakni, ruang T_1, ruang T_2, ruang T_3, dan ruang T_4. Sehingga, ruang metrik termuat dalam setiap ruang-ruang topologi tersebut sebagaimana ditunjukkan oleh gambar berikut yang menunjukkan hubungan antara ruang-ruang topologi dan ruang metrik.



Gambar 3. Pengelompokkan ruang-ruang topologi

Dari Gambar 3 terlihat bahwa ruang metrik memiliki lingkup tersempit sebab, termuat di semua ruang-ruang topologi sedangkan, ruang topologi memiliki lingkup terluas sebab, memuat ruang-ruang topologi lain dan ruang metrik.

4. Simpulan

Dari hasil kajian ini diperoleh bahwa dengan menggabungkan premis dari aksioma-aksioma separasi dalam masing-masing ruang topologi tersebut, diperoleh beberapa sifat sebagai berikut. Setiap ruang T_2 (Ruang *Hausdorff*) merupakan ruang T_1. Selanjutnya, setiap ruang T_3 (Ruang Regular T_1) merupakan ruang T_2 (Ruang *Hausdorff*) dan setiap ruang T_4 (Ruang Normal T_1) merupakan ruang T_3 (Ruang Regular T_1) serta, setiap ruang metrik merupakan ruang-ruang topologi tersebut. Akan tetapi, sifat-sifat hubungan antara ruang-ruang topologi tersebut tidak berlaku untuk kebalikannya.

Dari hasil kajian ini, diperoleh juga suatu teorema fundamental separasi ruang topologi yang merupakan gabungan dari beberapa teorema yang menyimpulkan bahwa ruang metrik memenuhi semua aksioma separasi dalam ruang-ruang topologi yakni, ruang T_1, ruang T_2 (Ruang *Hausdorff*), ruang T_3, dan ruang T_4.

Ucapan Terima Kasih

Penulis utama dalam artikel ini menyampaikan terima kasih kepada yayasan VDMS yang telah memberikan beasiswa sejak tahun 2014 dan juga kepada UNDANA-DIKTI yang telah memberikan beasiswa Peningkatan Prestasi Akademik (PPA) tahun 2014 kepada penulis utama selama menempuh pendidikan strata 1 di UNDANA hingga terselesaikannya penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

1. Alhosaini, Asaas M.A. 2008. t_γ *- Open Sets and Separation Axioms*. Journal of Kerbala University. 6(4): 1-7.

2. Ampang, Melyta. 2011. *Kajian Ruang Koleksi Semua Fungsi Kontinu dari Interval Tertutup [a,b] ke Himpunan Bilangan Real (Skripsi)*. FST-UNDANA: Kupang.

3. Apostol, Tom M. 1974. *Mathematical Analysis*. 2nd ed. Addison-Wesley. ISBN 978-0-201-00288-1.

4. Bartle.R.G, Sherbert.R.D. 1992. *Introduction To Real Analysis*. Jhon Wiley and Sons: New York.

ISSN 1412-6184

5. Darmawijaya, Soeparna. 1998. *Pengantar Analisis*. Percetakan UGM: Yogyakarta.

6. Korner. T.W. 2014. *Metric and Topological Space*. University of Cambridge: London.

7. Lipschutz, Seymour. 1983. *General Topology*: McGraw-Hill Book Company: New York.

8. Roy.Bishwambhar, Sen.Ritu, Noiri.Takashi. 2013. *Separation Axioms On Topological Spaces-A Unified Version*. European Journal Of Pure And Applied Mathematics. 6(1): 44-52.